

Università degli Studi di Bologna
 Scuola di Ingegneria e Architettura
 Dipartimento di Ingegneria Industriale
 Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA MECCANICA – sede di Forlì

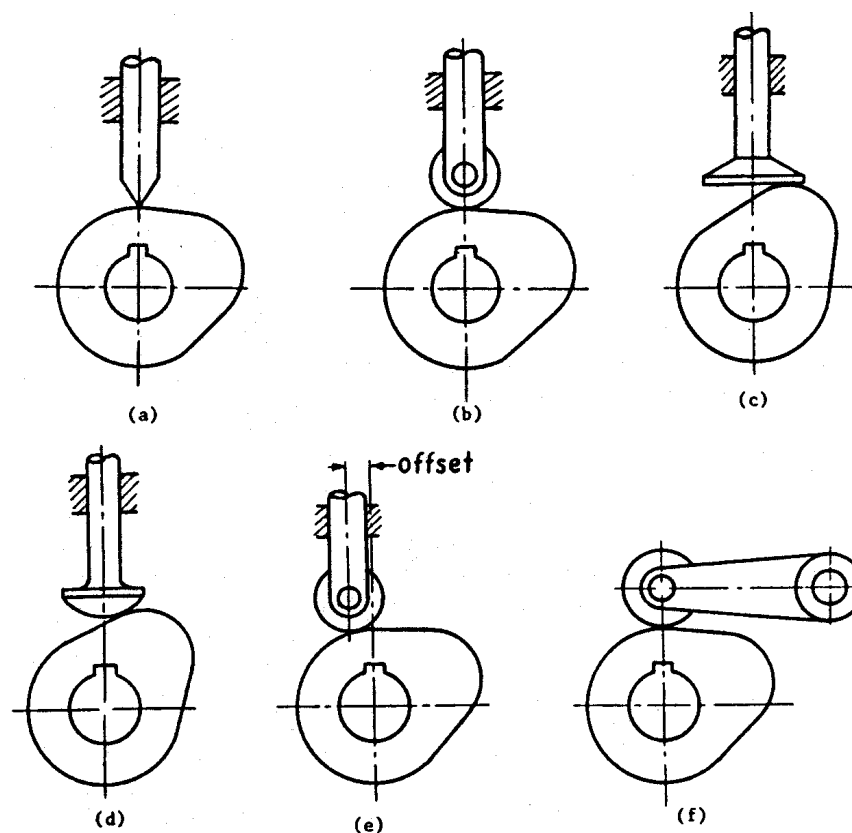
**MECCANICA APPLICATA
 ALLE MACCHINE LM**

prof. Alessandro RIVOLA
 Tel. 0543.374441
 alessandro.rivola@unibo.it

**MECCANISMI
 CON CAMME**

1. Classificazione

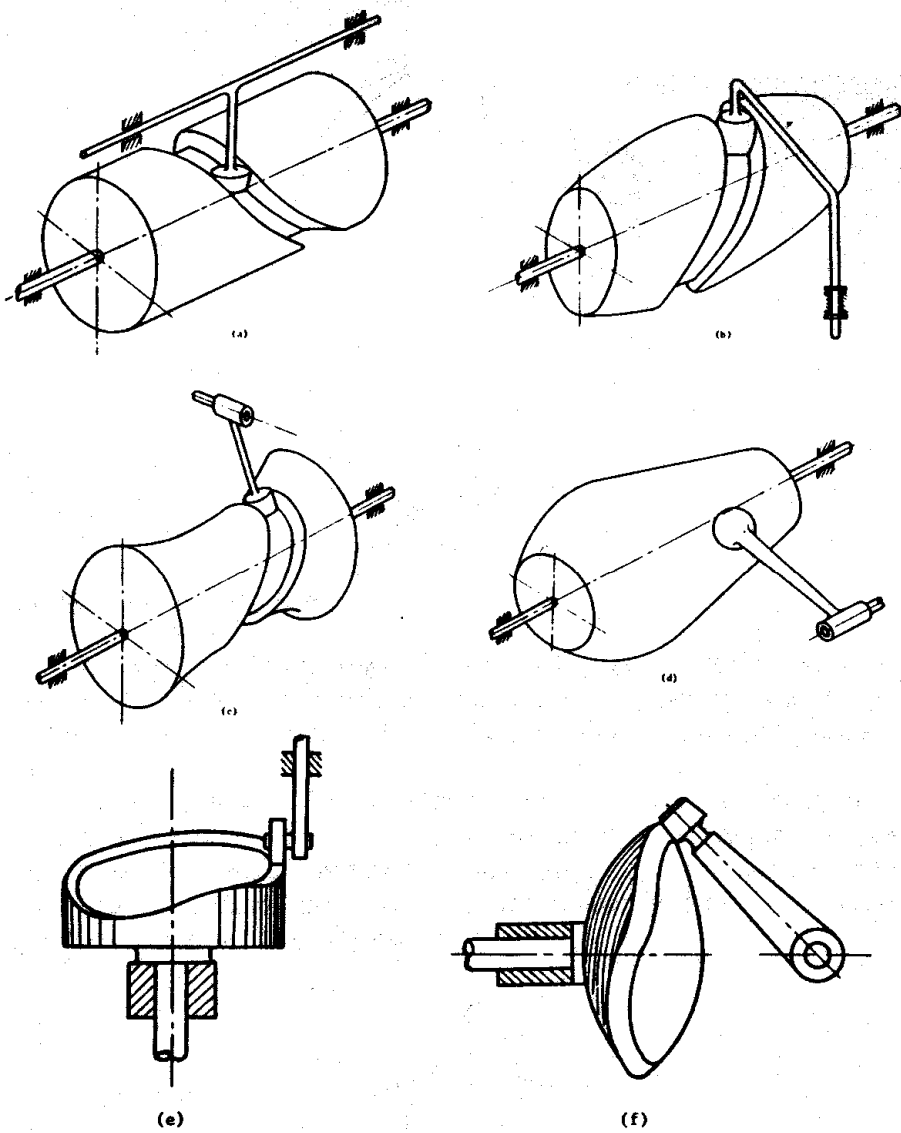
Meccanismi con Camme Piane



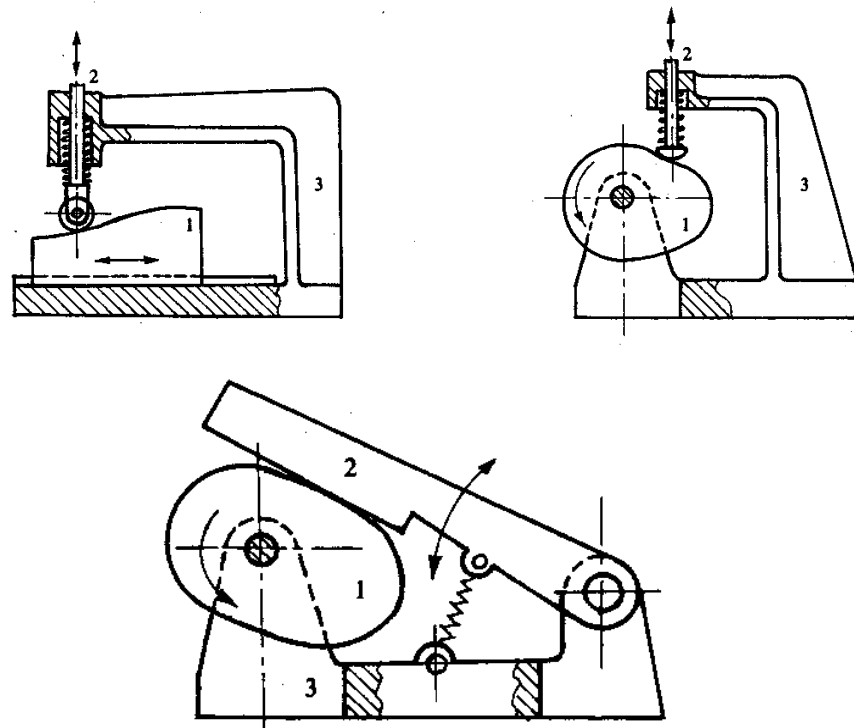
- a) b) c) d) e) Cedente Traslante (Punteria)
- f) Cedente Rotante (Bilanciere)
- a) b) c) d) Punteria Centrata
- e) Punteria Eccentrica

- a) Punteria a Coltello
- b) e) f) Cedente a Rotella
- c) Punteria a Piattello
- d) Punteria sferica

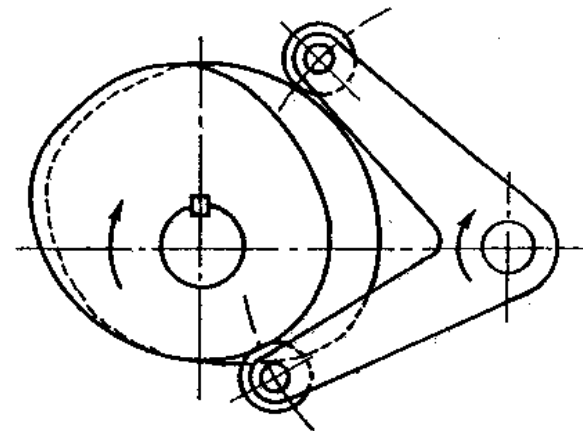
Meccanismi con Camme Spaziali



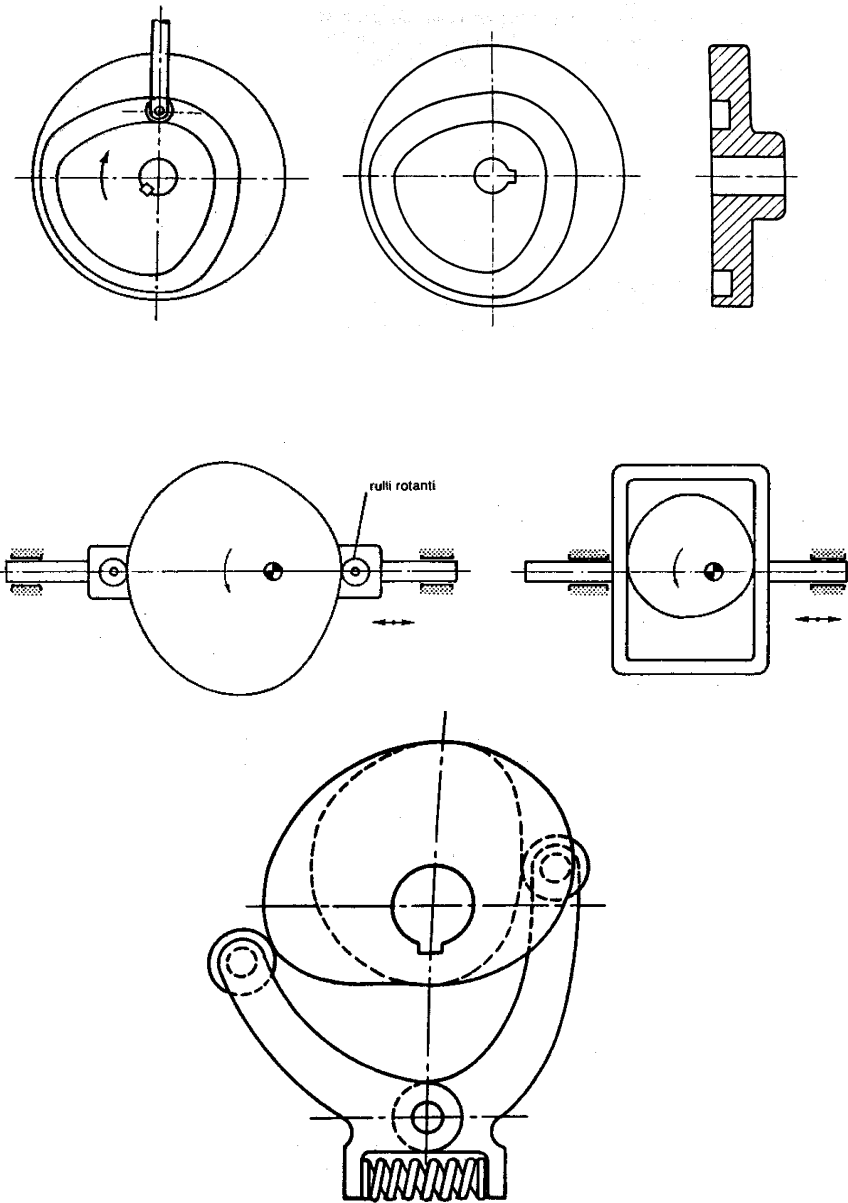
Accoppiamenti di Forza



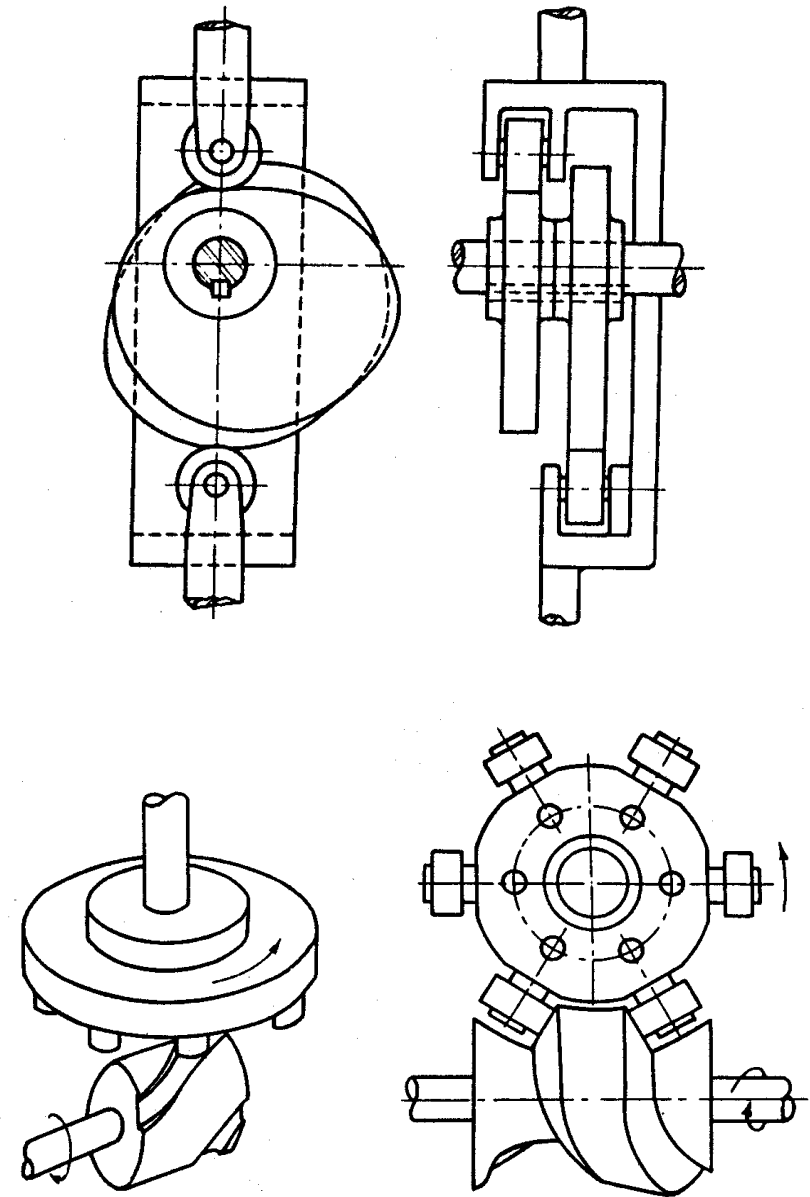
Accoppiamenti di Forma



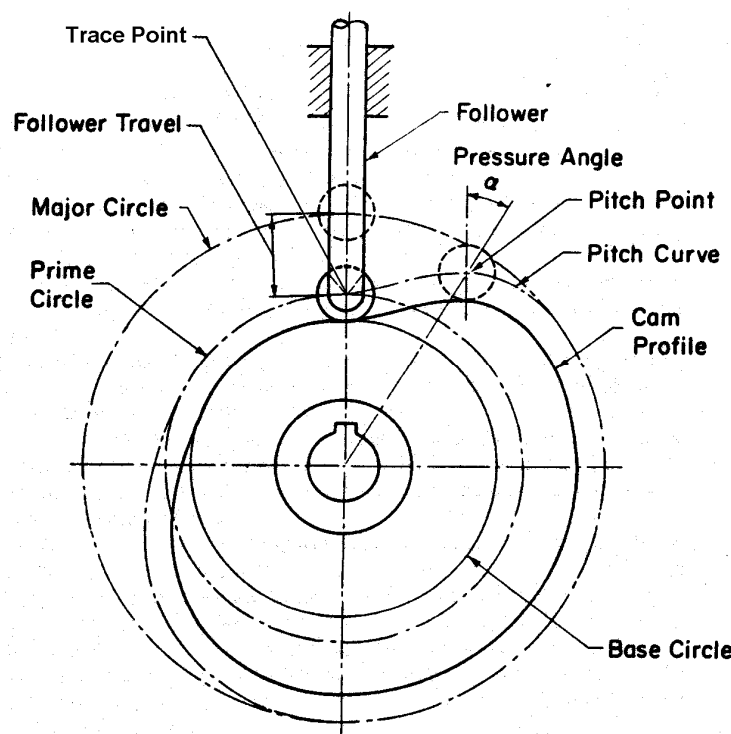
Accoppiamenti di Forma



Accoppiamenti di Forma



2. Nomenclatura



Trace Point Punto di riferimento	Punto teorico sul cedente; corrisponde al punto sul tagliente di una punteria a coltello. Nel caso di punteria a rotella coincide con il centro della rotella. Nel caso di punteria a piattello è l'intersezione della superficie del piattello con la parallela all'asse della punteria passante per il centro della camma. La sua traiettoria è il profilo primitivo.
Pitch Curve Profilo Primitivo	La traiettoria del punto di riferimento nel moto del cedente rispetto alla camma.
Cam Profile Profilo della camma	La superficie della camma a contatto con il cedente. Per la punteria a coltello, il profilo della camma coincide con il profilo primitivo.
Base Circle Cerchio di Base	La più piccola circonferenza, con centro nell'asse di rotazione della camma, tangente al profilo camma.
Pressure Angle Angolo di Pressione	L'angolo tra la normale al profilo primitivo e la direzione del moto del cedente.

3. Analisi Cinematica

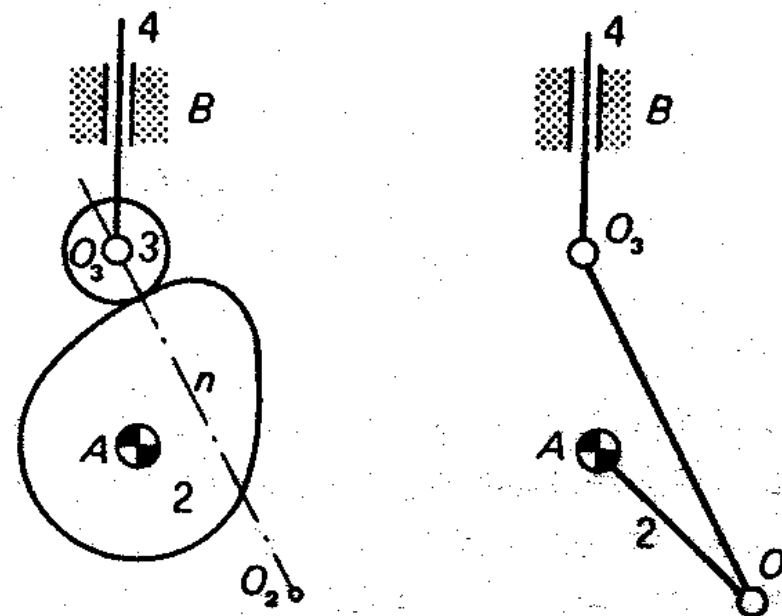
Problema: nota la forma della camma e il tipo di meccanismo, determinare posizione, velocità ed accelerazione del cedente.

E' un problema che si presenta raramente poiché ciò che si conosce è proprio la legge di moto del cedente ed è in base a questa che si determina la forma della camma. Vediamo comunque come sia possibile risolvere il problema assegnato.

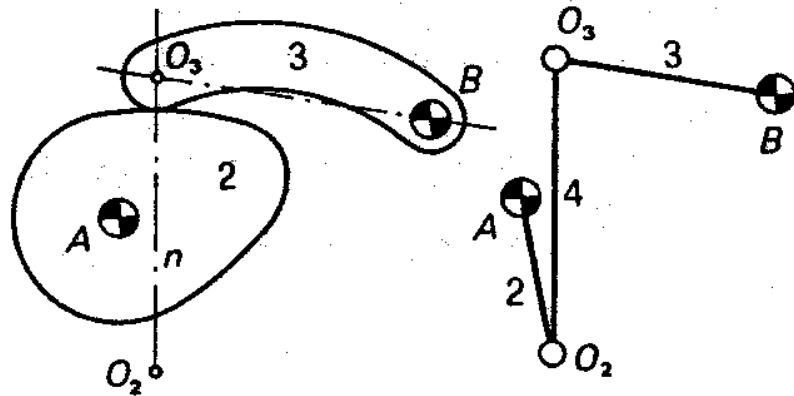
Meccanismi Cinematicamente Equivalenti

Prendiamo in esame il meccanismo a camma con punteria a rotella rappresentato in figura. E' facile vedere che nell'intorno di una qualunque configurazione esso è cinematicamente equivalente ad un manovellismo di spinta avente per telaio il telaio del meccanismo a camma, per corsoio la punteria e la cui biella ha gli assi delle coppie rotoidali in corrispondenza dei centri di curvatura dei profili di camma e rotella. Infatti la distanza O_2O_3 resta invariata per uno spostamento infinitesimo del meccanismo.

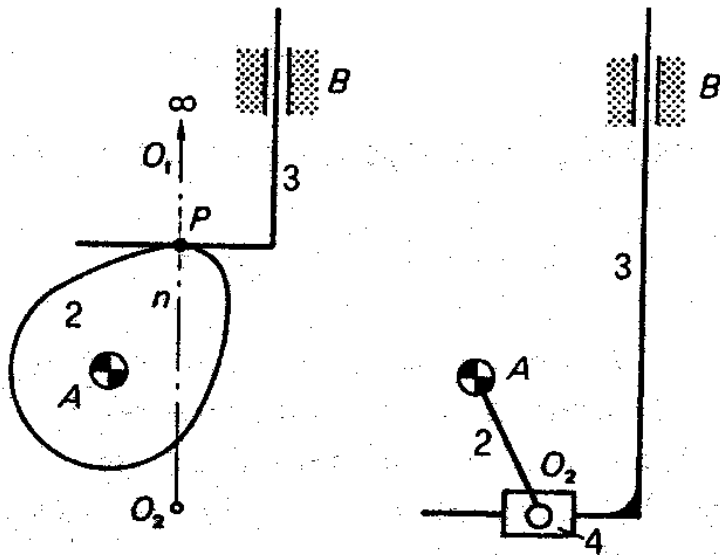
Per l'analisi cinematica si può allora procedere con i metodi noti per i sistemi articolati piani. Ovviamente occorre conoscere le posizioni del centro di curvatura del profilo camma.



Per il meccanismo a camma e bilanciere rappresentato nella seguente figura, il meccanismo cinematicamente equivalente è un quadrilatero articolato avente per telaio il telaio del meccanismo a camma, con biella avente gli assi delle coppie rotoidali in corrispondenza dei centri di curvatura dei profili di camma e rotella e aste incernierate in corrispondenza degli assi di camma e bilanciere.



Analogo ragionamento può essere impiegato per determinare il meccanismo cinematicamente equivalente ad un meccanismo a camma con piattello (vedi figura seguente).



4. Sintesi

4.1 Tracciamento del profilo camma con Metodo Grafico

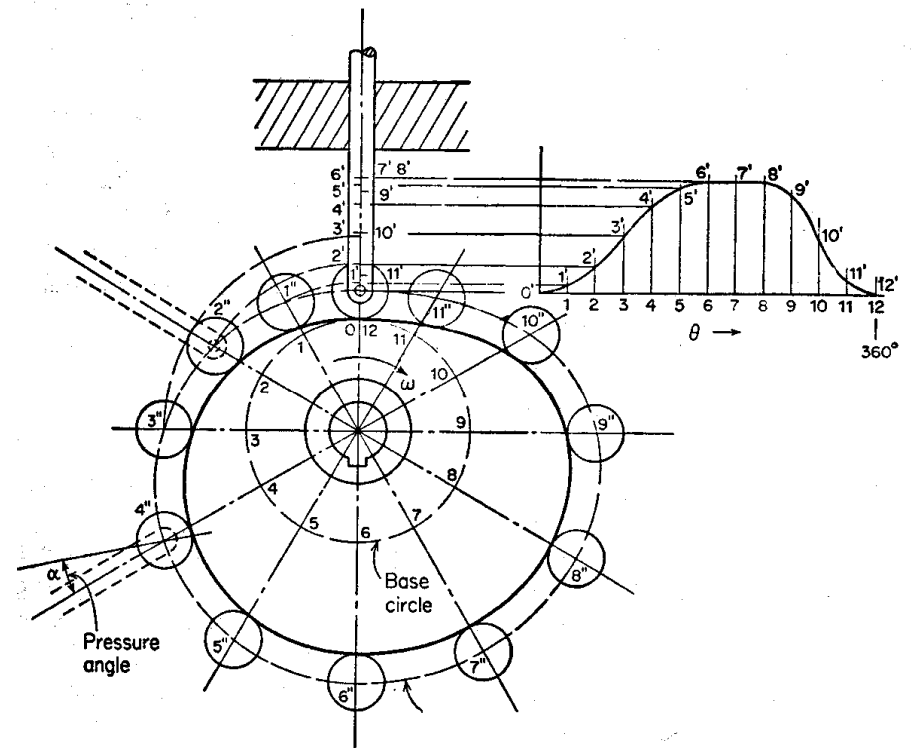
Problema: assegnata la legge di moto si deve disegnare la camma atta ad imporre al cedente tale legge di moto.

In generale, stabilita la funzione da generare $s=s(\theta)$, è necessario determinare i profili coniugati dei due membri a contatto nella coppia superiore. Solitamente la forma di uno dei due profili è nota (profilo circolare, rettilineo, ...). La determinazione dell'altro profilo avviene con il metodo dell'involuppo.

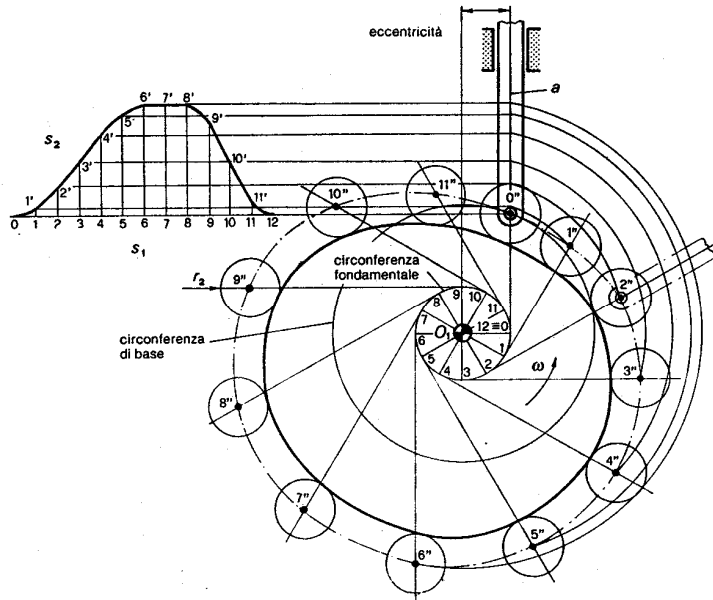
Si considera il moto relativo al membro di cui si vuol determinare il profilo, facendo assumere al membro di cui è noto il profilo le posizioni definite dagli accoppiamenti e dalla funzione $s=s(\theta)$ che si vuol realizzare. In altre parole si opera una inversione cinematica assegnando ad ogni membro una velocità angolare uguale e contraria a quella del membro con profilo da determinare (la camma).

L'involuppo delle successive posizioni assunte dal membro con profilo noto costituisce il profilo coniugato che si vuole determinare.

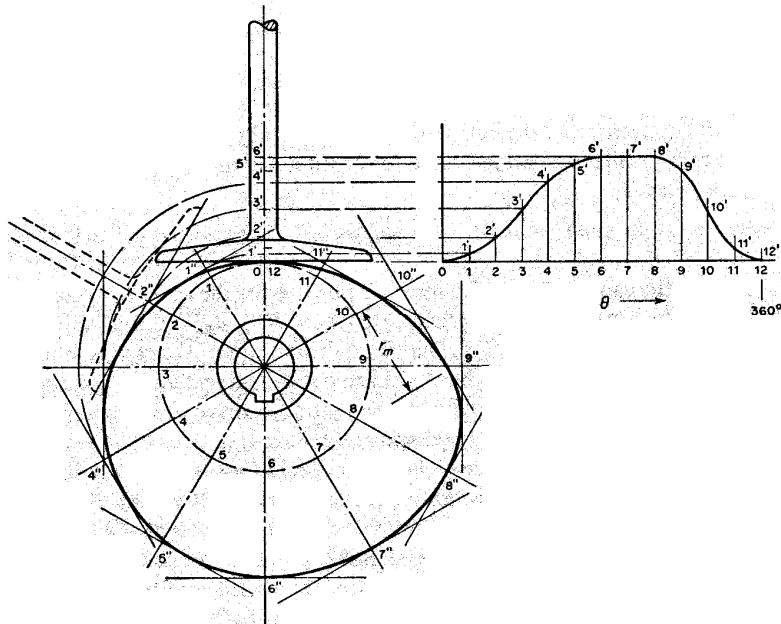
Punteria a Rotella Centrata



Punteria a Rotella Deviata

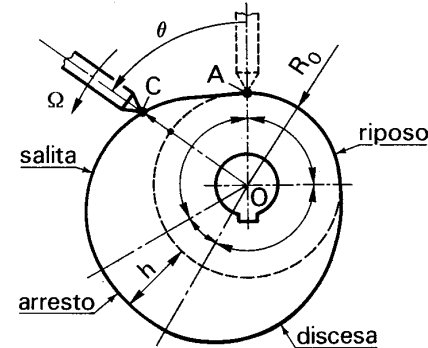


Punteria a Piattello Centrata



4.2 Determinazione del profilo camma e della traiettoria del centro fresa con metodi analitici

4.2.1 Camma a disco con punteria a coltello.



Per la punteria a coltello, il profilo camma coincide con il profilo primitivo. Possiamo quindi fare riferimento a quest'ultimo.

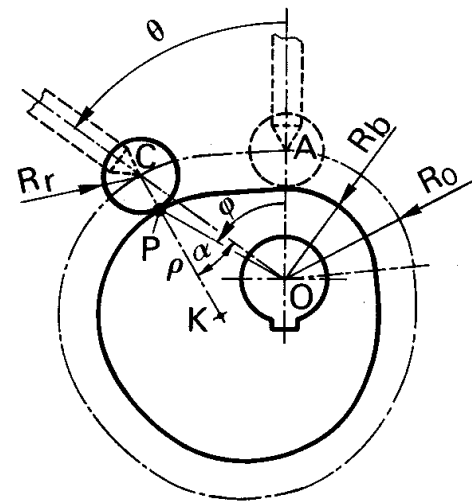
Per un generico angolo di rotazione camma pari a θ , la distanza radiale del punto di riferimento dal centro di rotazione della camma è:

$$OC = R = R_0 + s(\theta).$$

Pertanto, il profilo della camma è definito, in coordinate polari, dal raggio OC e dall'angolo θ .

Il problema della determinazione della traiettoria del centro fresa si riduce ad un caso particolare del meccanismo a camma con punteria a rotella, si rimanda, quindi, alla relativa trattazione.

4.2.2 Camma a disco con punteria a rotella centrata.



In questo caso il profilo camma differisce dal profilo primitivo.

Indicato con K il centro di curvatura del profilo camma, osserviamo che il meccanismo cinematicamente equivalente è un manovellismo di spinta centrato in cui OK è la manovella e CK la biella.

Osserviamo inoltre che tale meccanismo equivalente è comune anche al meccanismo a camma con punteria a coltello.

Pertanto K è, come ovvio, anche centro di curvatura del profilo primitivo.

Indicato con P il punto di tangenza tra rotella e profilo della camma, osserviamo che, in generale, P non si trova sul segmento OC per cui è errato ottenere il profilo della camma detraendo in senso radiale il raggio R_r della rotella dalla quantità $OC=R_b+r+s(\theta)=R_0+s(\theta)$ (che rappresenta il profilo primitivo).

Determinazione del Profilo interno

Applicando il teorema di Carnot al triangolo CPO, si ha:

$$PO = \sqrt{R_r^2 + (R_0 + s)^2 - 2R_r(R_0 + s)\cos\alpha}$$

Inoltre, posto: $\beta = \varphi - \theta$

per il teorema dei seni sullo stesso triangolo risulta: $PO \sin \beta = CP \sin \alpha$
da cui si ricava:

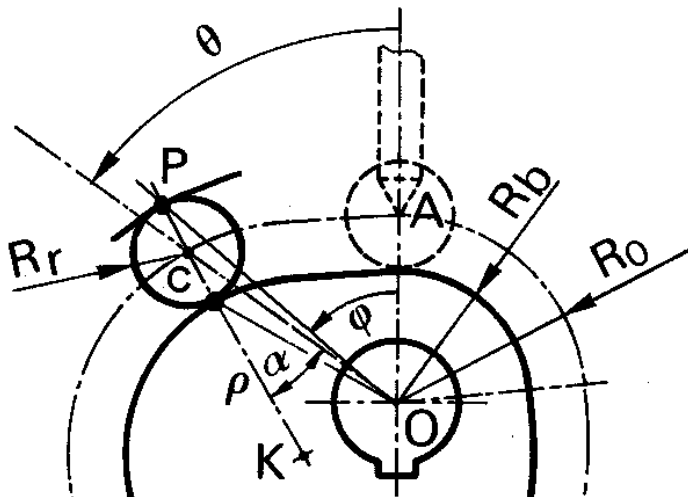
$$\beta = \arcsin\left(\frac{R_r}{PO} \sin \alpha\right)$$

Il profilo camma è allora espresso dalle coordinate polari:

$$\varphi = \theta + \arcsin\left(\frac{R_r}{PO} \sin \alpha\right)$$

Determinazione del Profilo esterno

Esiste naturalmente anche il profilo esterno.
Tale profilo viene impiegato nel caso di camma a disco con scanalatura (contatto di forma). Per determinarlo facciamo riferimento alla figura seguente.



Applicando il teorema di Carnot al triangolo CPO, si ha:

$$PO = \sqrt{R_r^2 + (R_0 + s)^2 - 2R_r(R_0 + s)\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{R_r^2 + (R_0 + s)^2 + 2R_r(R_0 + s)\cos(\alpha)}$$

Inoltre, posto: $\beta = \theta - \varphi$

proiettando OP e OC sulla normale a OC passante per il punto P, risulta:

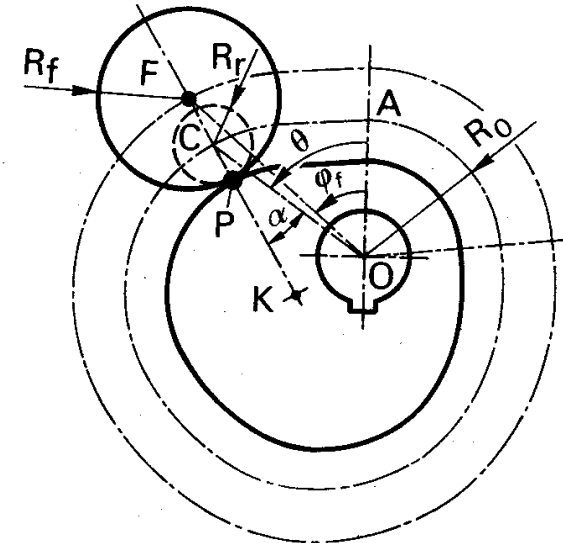
$$PO \sin \beta = CP \sin \alpha \quad \text{da cui si ricava:} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{R_r}{PO} \sin \alpha\right)$$

Il profilo esterno della camma è allora espresso dalle coordinate polari:

$$\varphi = \theta - \arcsin\left(\frac{R_r}{PO} \sin \alpha\right)$$

Determinazione della traiettoria del centro fresa.

Come è ovvio, se il raggio della fresa R_f coincide con il raggio del rullo R_r , la traiettoria del centro fresa coincide con il profilo primitivo.
In caso contrario il centro fresa si trova sulla normale al profilo della camma e dista dal punto C una quantità pari a: $CF=R_f - R_r$.



Applicando il teorema di Carnot al triangolo FCO, si ha:

$$OF = \sqrt{(CF)^2 + (CO)^2 + 2(CF)(CO)\cos\alpha}$$

Inoltre, posto: $\gamma_f = \theta - \varphi_f$

proiettando OF e OC sulla normale a OC passante per il punto F, risulta:

$$CF \sin \alpha = OF \sin \gamma_f \quad \text{da cui si ricava:} \quad \gamma_f = \arcsin\left(\frac{CF}{OF} \sin \alpha\right)$$

La traiettoria del centro fresa è quindi espressa dalle coordinate polari:

$$\boxed{\begin{aligned} OF \\ \varphi_f = \theta - \arcsin\left(\frac{CF}{OF} \sin \alpha\right) \end{aligned}}$$

Queste espressioni sono valide anche per il caso di punteria a coltello dove naturalmente, essendo $R_r=0$, si ha:

$$CF=R_r$$

4.2.3 Camma a disco con punteria a piattello.

Determinazione del profilo camma.

Effettuata l'inversione cinematica, in una posizione generica la distanza tra l'asse O della camma e il punto di riferimento C (C è l'intersezione tra la superficie del piattello e la parallela al moto della punteria passante per O) vale: $OC=R_b+s(\theta)$.

Il punto di contatto P in generale non coincide con il punto di riferimento. Le coordinate polari del profilo camma di possono trovare come segue:

$$\text{Dal triangolo OCP risulta:} \quad OP = \sqrt{OC^2 + CP^2}$$

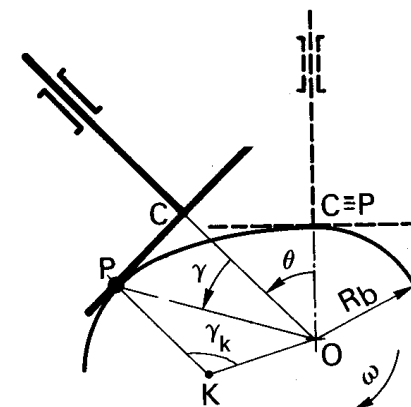
Inoltre, possiamo osservare che la distanza CP è la medesima che si ha tra il centro della camma O ed il centro di istantanea rotazione tra camma e punteria. Pertanto il segmento CP rappresenta la velocità della punteria a meno della velocità angolare della camma, ovvero:

$$CP = \frac{\dot{s}}{\Omega} = \frac{\Omega s'}{\Omega} = s'$$

$$\text{Inoltre si ha:} \quad \text{tg} \gamma = \frac{CP}{OC} = \frac{s'}{R_b + s(\theta)} \quad \text{e, posto:} \quad \varphi = \theta + \gamma$$

il profilo camma risulta espresso dalle coordinate polari:

$$\boxed{\begin{aligned} OP &= \sqrt{[R_b + s(\theta)]^2 + s'^2} \\ \varphi &= \theta + \text{arctg} \left[\frac{s'}{R_b + s(\theta)} \right] \end{aligned}}$$



Dimensionamento piattello.

$$\text{Il piattello deve risultare lungo almeno:} \quad (CP)_{\max} - (CP)_{\min} = (s')_{\max} - (s')_{\min}$$

Determinazione della traiettoria del centro fresa.

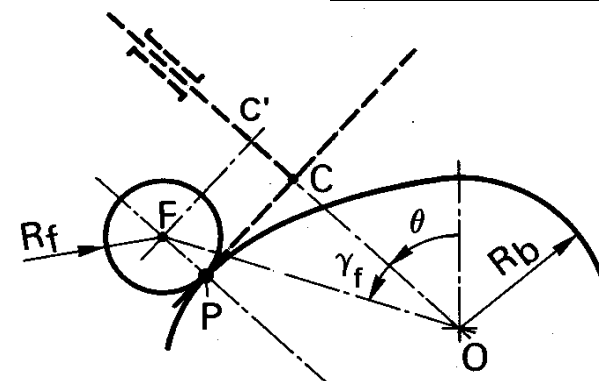
$$\text{Dal triangolo OC'F risulta:} \quad OF = \sqrt{(OC')^2 + (C'F)^2}$$

$$\text{dove:} \quad C'F = CP = s' \quad \text{e} \quad OC' = R_b + R_f + s(\theta)$$

$$\text{Inoltre si ha:} \quad \text{tg} \gamma_f = \frac{C'F}{OC'} = \frac{s'}{R_b + R_f + s(\theta)} \quad \text{e, posto:} \quad \varphi_f = \theta + \gamma_f$$

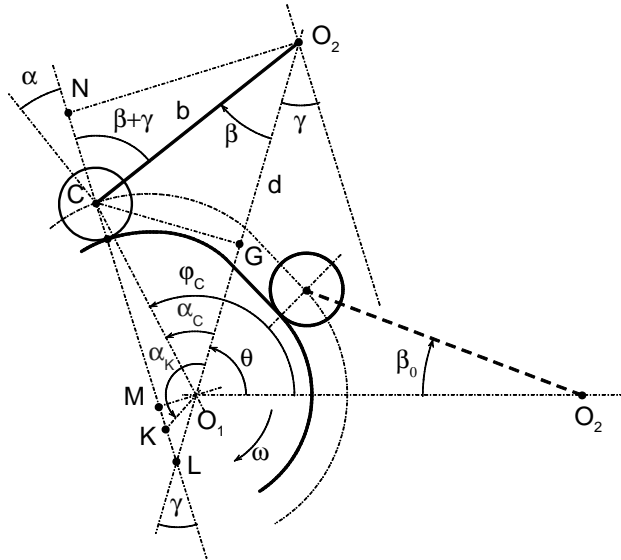
$$\boxed{\begin{aligned} OF &= \sqrt{[R_b + R_f + s(\theta)]^2 + s'^2} \\ \varphi_f &= \theta + \text{arctg} \left[\frac{s'}{R_b + R_f + s(\theta)} \right] \end{aligned}}$$

le coordinate del centro fresa sono:



4.2.4 Camma a disco e bilanciere con rotella.

La posizione iniziale del cedente è quella tratteggiata in figura, in cui la rotella si appoggia al cerchio di base di raggio R_r all'inizio del tratto di salita ed il cedente forma con il telaio O_1O_2 l'angolo β_0 .



Ovviamente in questo caso la $s(\theta)$ rappresenta le rotazioni del cedente; si ha che l'angolo che il bilanciere forma con il telaio è dato da:

$$\beta = \beta_0 + s(\theta).$$

Si ponga: $O_1O_2 = d$ e $O_2C = b$

$$O_1C = \sqrt{CG^2 + O_1G^2}$$

Dal triangolo O_1GC risulta:

$$\alpha_c = \arctg \left[\frac{CG}{O_1G} \right]$$

dove: $CG = b \sin \beta$
 $O_1G = d - b \cos \beta$

Le coordinate polari del profilo primitivo sono:

$$O_1C = \sqrt{(b \sin \beta)^2 + (d - b \cos \beta)^2}$$

$$\varphi_c = \theta + \alpha_c = \theta + \arctg \left[\frac{b \sin \beta}{d - b \cos \beta} \right]$$

Il punto L di figura è il centro di istantanea rotazione nel moto relativo camma-bilanciere, pertanto risulta:

$$\omega O_1L = \frac{ds}{dt} O_2L \quad \text{da cui si ha:} \quad \frac{O_1L}{O_2L} = \frac{1}{\omega} \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{d\theta} = s'$$

Per la similitudine dei triangoli O_2NL e O_1ML risulta anche: $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{O_1M}{O_2N} = s'$

Sia γ l'angolo formato dal segmento CK con il segmento O_1O_2 .

Osservando che:
 $O_1M = b \sin(\beta + \gamma) - d \sin \gamma$
 $O_2N = b \sin(\beta + \gamma)$

si ha: $b \sin(\beta + \gamma) - d \sin \gamma = b \sin(\beta + \gamma) s'$

che, dopo alcuni passaggi, fornisce: $tg \gamma = \frac{b \sin \beta (1 - s')}{d - b \cos \beta (1 - s')}$

Angolo di pressione.

L'angolo di pressione è per definizione l'angolo compreso tra la direzione della velocità di un punto del cedente e la normale al profilo primitivo. Facendo riferimento alla figura, indicato con α l'angolo di pressione, lo stesso resta individuato tra la normale al segmento O_2C ed il segmento KC.

L'angolo di pressione è quindi determinato dalla: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma = \frac{\pi}{2} - [\beta_0 + s(\theta)] - \gamma$

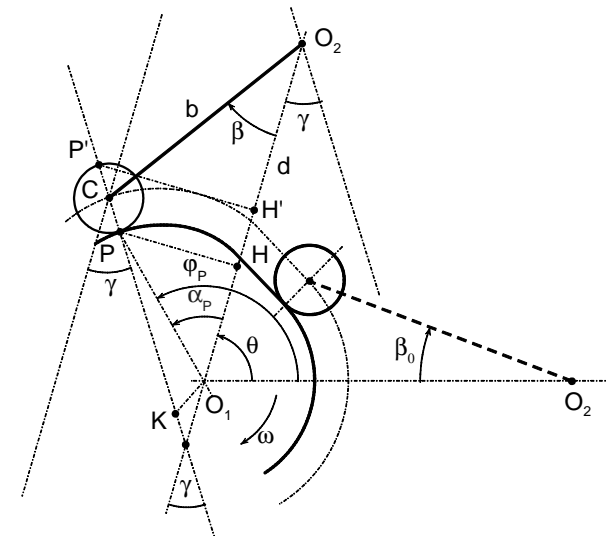
Determinazione del profilo camma.

$$O_1P = \sqrt{PH^2 + O_1H^2}$$

Dal triangolo O_1HP risultano le seguenti:

$$\alpha_p = \arctg \left[\frac{PH}{O_1H} \right]$$

Essendo: $PH = b \sin \beta - R_r \sin \gamma$
 $O_1H = d - b \cos \beta - R_r \cos \gamma$



Le coordinate polari del profilo camma interno sono date da:

$$O_1P = \sqrt{(b \sin \beta - R_r \sin \gamma)^2 + (d - b \cos \beta - R_r \cos \gamma)^2}$$

$$\varphi_p = \theta + \alpha_p = \theta + \arctg \left[\frac{b \sin \beta - R_r \sin \gamma}{d - b \cos \beta - R_r \cos \gamma} \right]$$

Per il profilo camma esterno risulta invece:

$$O_1P' = \sqrt{(b \sin \beta + R_r \sin \gamma)^2 + (d - b \cos \beta + R_r \cos \gamma)^2}$$

$$\varphi_{p'} = \theta + \alpha_{p'} = \theta + \arctg \left[\frac{b \sin \beta + R_r \sin \gamma}{d - b \cos \beta + R_r \cos \gamma} \right]$$

Determinazione della traiettoria del centro fresa.

$$O_1F = \sqrt{O_1J^2 + JF^2}$$

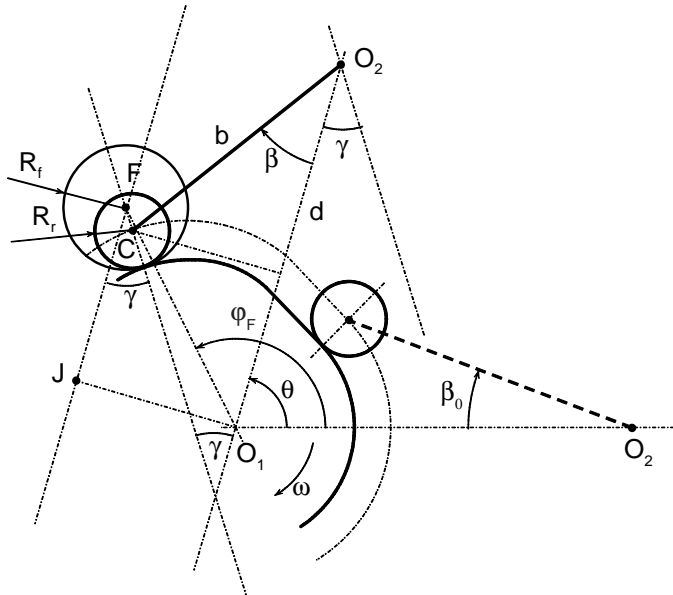
Dal triangolo O_1JF risulta:

$$\varphi_f = \theta + \arctg \left[\frac{O_1J}{JF} \right]$$

dove:

$$O_1J = b \sin \beta + (R_f - R_r) \sin \gamma$$

$$JF = d - b \cos \beta + (R_f - R_r) \cos \gamma$$



Pertanto le coordinate polari del centro fresa per tagliare il profilo interno sono:

$$O_1F = \sqrt{[b \sin \beta + (R_f - R_r) \sin \gamma]^2 + [d - b \cos \beta + (R_f - R_r) \cos \gamma]^2}$$

$$\varphi_f = \theta + \arctg \left[\frac{b \sin \beta + (R_f - R_r) \sin \gamma}{d - b \cos \beta + (R_f - R_r) \cos \gamma} \right]$$

Analogamente si ricavano le coordinate polari del centro fresa per tagliare il profilo esterno:

$$O_1F' = \sqrt{[b \sin \beta - (R_f - R_r) \sin \gamma]^2 + [d - b \cos \beta - (R_f - R_r) \cos \gamma]^2}$$

$$\varphi_{F'} = \theta + \arctg \left[\frac{b \sin \beta - (R_f - R_r) \sin \gamma}{d - b \cos \beta - (R_f - R_r) \cos \gamma} \right]$$

4.3 Determinazione del raggio di curvatura del profilo camma e fenomeno del sottotaglio

4.3.1 Camma a disco con punteria a coltello.

Il centro di curvatura K del profilo primitivo si trova ovviamente sulla normale al profilo nel punto di contatto.

Per trovare il raggio di curvatura del profilo, $CK = \rho_0$, fissiamo un sistema di riferimento cartesiano complesso ($x - jy$) con origine nel punto O ed asse reale x coincidente con la direzione di riferimento $\theta = 0$ (OA in figura) e studiamo il moto del punto C .

Tale moto, che istante per istante è approssimabile ad un moto circolare su un arco di centro K e raggio CK , è composto dal moto relativo al telaio e dal moto di trascinamento. Nel moto relativo al telaio C si muove lungo il raggio OC . Nel moto di trascinamento C si muove lungo un arco di centro O e raggio $R = R_0 + s(\theta)$.

Il vettore $(C - O)$ può essere scritto come: $(C - O) = R e^{j\vartheta}$.

Definiamo i due seguenti versori ortogonali:

$$\mathbf{a} = e^{j\vartheta} \quad \mathbf{b} = e^{j(\vartheta + \frac{\pi}{2})} = j e^{j\vartheta} = j \mathbf{a}$$

valgono ovviamente le:

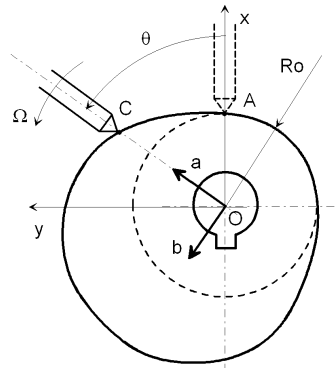
$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = j \Omega e^{j\vartheta} = \Omega \mathbf{b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\Omega e^{j\vartheta} = -\Omega \mathbf{a}$$

Si ha inoltre:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = s' \Omega$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d s'}{dt} \Omega + s' \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d s'}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \Omega + s' \dot{\Omega} = s'' \Omega^2 + s' \dot{\Omega} \quad (1)$$



Essendo dunque:

$$(C-O) = R \mathbf{a} \quad (2)$$

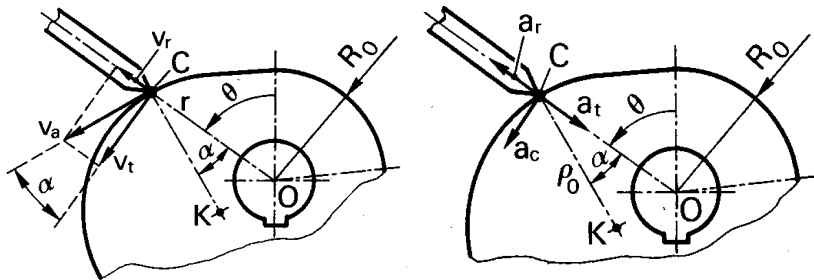
la derivata prima, rispetto al tempo, del vettore (C - O) si può scrivere come:

$$\frac{d(C-O)}{dt} = \frac{dR}{dt} \mathbf{a} + R \Omega \mathbf{b} \quad (3)$$

mentre la derivata seconda è: $\frac{d^2(C-O)}{dt^2} = \frac{d^2R}{dt^2} \mathbf{a} + \frac{dR}{dt} \Omega \mathbf{b} + \frac{dR}{dt} \Omega \mathbf{b} + R \dot{\Omega} \mathbf{b} - R \Omega^2 \mathbf{a}$

ovvero: $\frac{d^2(C-O)}{dt^2} = \frac{d^2R}{dt^2} \mathbf{a} + 2 \frac{dR}{dt} \Omega \mathbf{b} + R \dot{\Omega} \mathbf{b} - R \Omega^2 \mathbf{a} \quad (4)$

Nella (3) il primo termine è la velocità relativa \bar{v}_r , mentre il secondo è la componente di trascinamento \bar{v}_t . La velocità assoluta, che è perpendicolare a CK, è la somma vettoriale dei due termini.



Nell'ipotesi in cui la velocità angolare della camma sia costante, tenendo conto delle (1), la (3) e la (4) diventano:

$$\frac{d(C-O)}{dt} = s' \Omega \mathbf{a} + R \Omega \mathbf{b} \quad (3'); \quad \frac{d^2(C-O)}{dt^2} = s'' \Omega^2 \mathbf{a} + 2 s' \Omega^2 \mathbf{b} - R \Omega^2 \mathbf{a} \quad (4')$$

Il modulo della velocità assoluta è poi:

$$\left| \frac{d(C-O)}{dt} \right| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \Omega^2} = \Omega \sqrt{s'^2 + R^2} \quad (5)$$

Essendo la velocità assoluta perpendicolare a CK, si può ricavare semplicemente l'angolo di pressione. Risulta infatti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_r}{v_t} = \frac{s' \Omega}{R \Omega} = \frac{s'}{R_0 + s} \quad (6)$$

Per definizione di raggio di curvatura, esso è pari al rapporto tra il quadrato del modulo della velocità assoluta e la componente normale della accelerazione assoluta.

L'accelerazione assoluta in direzione CK vale:

$$\left(\frac{d^2(C-O)}{dt^2} \right)_n = (-s'' \Omega^2 + R \Omega^2) \cos \alpha + (2 s' \Omega^2) \sin \alpha$$

e tenendo conto che: $\sin \alpha = \frac{v_r}{\left| \frac{d(C-O)}{dt} \right|}$ e $\cos \alpha = \frac{v_t}{\left| \frac{d(C-O)}{dt} \right|}$,

il raggio di curvatura risulta essere pari a:

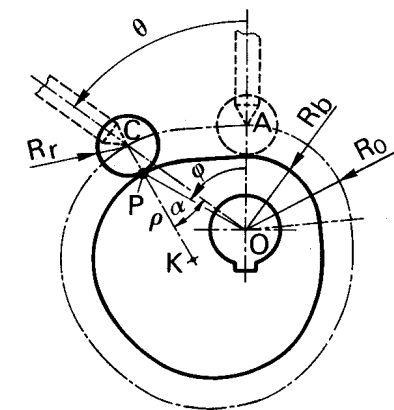
$$\rho_0 = \frac{\left| \frac{d(C-O)}{dt} \right|^2}{\left(\frac{d^2(C-O)}{dt^2} \right)_n} = \frac{\Omega^3 (s'^2 + R^2)^{3/2}}{(-s'' \Omega^2 + R \Omega^2) R \Omega + (2 s' \Omega^2) s' \Omega} = \frac{(s'^2 + R^2)^{3/2}}{-s'' R + 2 s'^2 + R^2}$$

In conclusione è:

$$\rho_0 = \frac{[(R_0 + s)^2 + s'^2]^{3/2}}{-(R_0 + s)s'' + 2s'^2 + (R_0 + s)^2}$$

4.3.2 Camma a disco con punteria a rotella centrata.

Come osservato in precedenza (4.2.2), in questo caso il profilo camma differisce dal profilo primitivo.



Per determinare il raggio di curvatura della camma è sufficiente osservare che il punto di contatto P tra camma e rotella si trova sulla congiungente C e K ad una distanza dal centro della rotella pari a CP=R_r. Il raggio di curvatura del profilo camma è dunque:

$$\rho = PK = CK - CP \quad \text{ovvero:} \quad \rho = \rho_0 - R_r$$

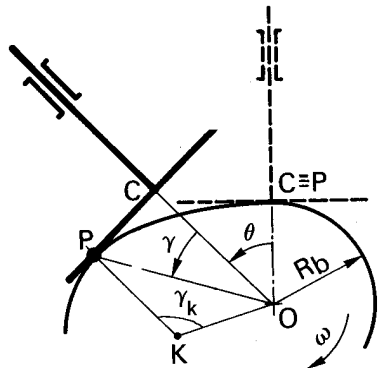
In definitiva il raggio di curvatura vale:

$$\rho = \frac{[s'^2 + (R_0 + s)^2]^{3/2}}{(R_0 + s)^2 - (R_0 + s)s'' + 2s'^2} - R_r$$

dove: $R_0 = R_b + R_r$

Si osservi che R_0 è il raggio base della corrispondente camma con punteria a coltello, mentre R_b il raggio base della camma con punteria centrata a rotella.

4.3.3 Camma a disco con punteria a piattello.



Posto uguale a γ_k l'angolo PKO, si ha:

$$OC = PK + OK \cos(\pi - \gamma_k) = PK - OK \cos \gamma_k$$

$$CP = OK \sin(\pi - \gamma_k) = OK \sin \gamma_k$$

Derivando la seconda rispetto a θ risulta:

$$\frac{d(CP)}{d\theta} = \frac{d(s')}{d\theta} = s'' = OK \cos \gamma_k$$

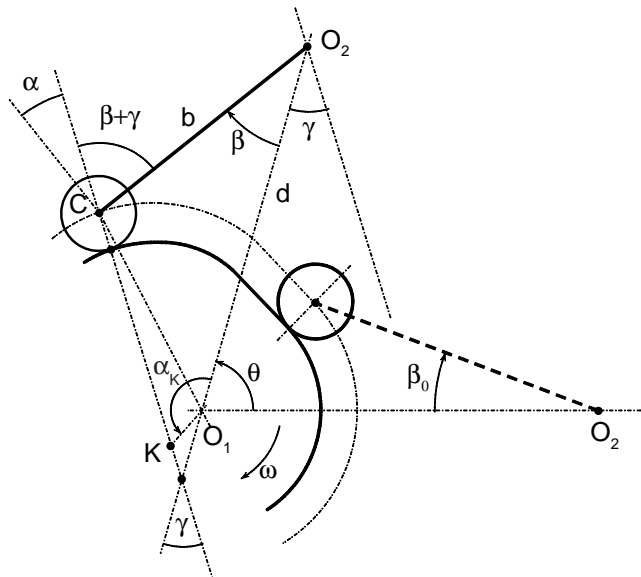
che, sostituita nella prima equazione, fornisce il raggio di curvatura del profilo:

$$\rho = PK = OC + OK \cos \gamma_k = OC + s''$$

4.3.4 Camma a disco e bilanciere con rotella.

Per calcolare il raggio di curvatura del profilo primitivo ρ_0 , si può scrivere la seguente equazione (da intendersi vettoriale):

$$\mathbf{O_1K} + \mathbf{KC} + \mathbf{CO_2} + \mathbf{O_2O_1} = \mathbf{0}$$



Proiettando la precedente secondo la direzione del telaio e della sua normale si ottiene:

$$I) \quad O_1K \cos \alpha_K + \rho_0 \cos \gamma + b \cos \beta - d = 0$$

$$II) \quad O_1K \sin \alpha_K + \rho_0 \sin \gamma - b \sin \beta = 0$$

Derivando la seconda equazione rispetto all'angolo camma θ , si ha:

$$O_1K \frac{d\alpha_K}{d\theta} \cos \alpha_K + \rho_0 \frac{d\gamma}{d\theta} \cos \gamma - b \frac{d\beta}{d\theta} \cos \beta = 0$$

$$\text{essendo: } \frac{d\alpha_K}{d\theta} = -1 \quad \left(\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} = s' \right) \quad (\text{vedi nota **})$$

$$\text{risulta: } O_1K \cos \alpha_K = \rho_0 \gamma' \cos \gamma - bs' \cos \beta$$

$$\text{che sostituita nella (I) fornisce: } \rho_0 = \frac{d - b \cos \beta - \rho_0 \gamma' \cos \gamma + bs' \cos \beta}{\cos \gamma}$$

$$\text{ed infine: } \rho_0 = \frac{d - b \cos(\beta_0 + s)(1 - s')}{\cos \gamma(1 + \gamma')} \quad (\text{vedi nota ***)}$$

$$\text{Il raggio di curvatura del profilo camma interno vale: } \rho = \rho_0 - R_r$$

(**) Dal momento che K è il centro di curvatura, se il segmento O_1O_2 ruota dell'angolo infinitesimo $d\theta$, il segmento O_1K resta fisso e, pertanto, l'angolo α_K diminuisce della quantità $d\theta$. In definitiva si ha:

$$\frac{d\alpha_K}{d\theta} = \frac{(\alpha_K - d\theta) - \alpha_K}{d\theta} = -1$$

(***) I valori di γ' e di $\cos \gamma$ da inserire nella formula per il calcolo del raggio di curvatura del profilo, si ricavano in base alle seguenti:

$$tg \gamma = \frac{b \sin \beta(1 - s')}{d - b \cos \beta(1 - s')} = \frac{D}{C} \quad \gamma = \arctg[tg \gamma] = \arctg\left(\frac{D}{C}\right)$$

$$\gamma' = \frac{d}{d\theta} \left[\arctg\left(\frac{D}{C}\right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{C}\right)^2} \frac{D'C - DC'}{C^2} = \frac{D'C - DC'}{C^2 + D^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma} = \sec^2 \gamma = 1 + tg^2 \gamma = 1 + \left(\frac{D}{C}\right)^2 \quad \text{da cui: } \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

4.3.5 Fenomeno del sottotaglio

Se il raggio di curvatura del profilo primitivo è minore, in valore assoluto, del raggio della rotella, si verifica il cosiddetto sottotaglio, cioè, pensando di impiegare per la costruzione del profilo camma una fresa di diametro uguale a quello della rotella, una parte del contorno della camma viene distrutto durante il taglio. Condizione affinché non si verifichi sottotaglio è dunque:

$$|\rho_0| > R_r \quad (1)$$

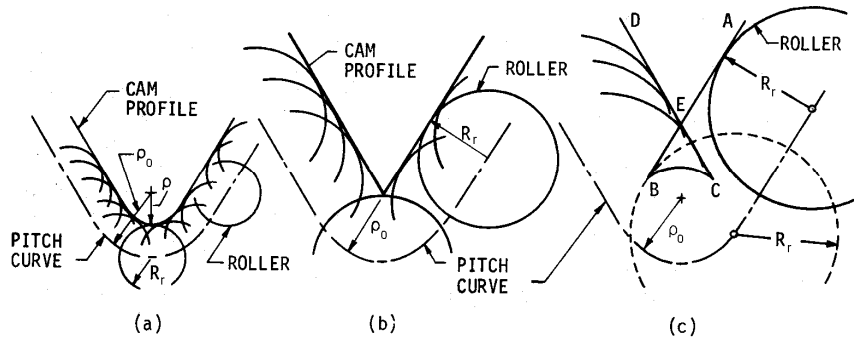
Ricordando l'espressione del raggio di curvatura del profilo primitivo nel caso di camma con punteria centrata a rotella:

$$\rho_0 = \frac{[s'^2 + (R_0 + s)^2]^{3/2}}{(R_0 + s)^2 - (R_0 + s)s' + 2s'^2} \quad \text{con} \quad R_0 = R_b + R_r$$

si osserva, come del resto è abbastanza intuitivo, che a parità di altre circostanze (legge di moto, raggio rotella), il pericolo di sottotaglio è tanto maggiore quanto minore è il raggio base della camma.

In figura è mostrato il caso in cui, a parità di raggio di curvatura del profilo primitivo si aumenta il raggio del rullo (di conseguenza diminuisce il raggio base).

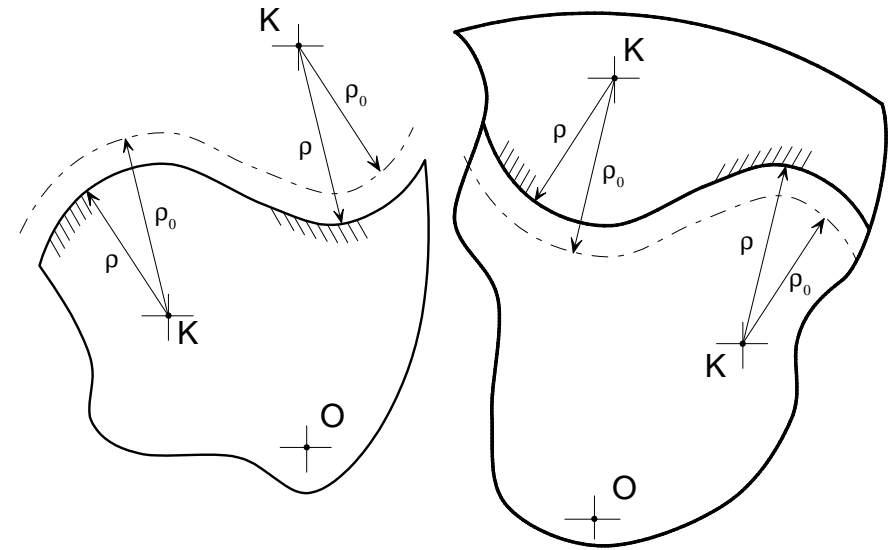
Nel caso (c) il profilo camma che darebbe luogo al profilo primitivo desiderato dovrebbe presentare un cappio. Come è ovvio, durante il taglio con una fresa avente diametro pari a quello del rullo, tale cappio viene distrutto; ne risulta che la camma così realizzata non è atta a generare la legge di moto desiderata.



Note sui segni dei raggi di curvatura

Il raggio di curvatura ρ_0 del profilo primitivo è positivo se il centro O della camma si trova dalla stessa parte del centro di curvatura K. In altre parole ρ_0 è positivo se il profilo è convesso rispetto al centro della camma O.

Il raggio di curvatura ρ del profilo camma è positivo se il materiale si trova dalla stessa parte del centro di curvatura K. In altre parole ρ è positivo se il profilo è concavo rispetto al centro di curvatura K.



Dimostriamo la relazione (1).

Con riferimento alla figura abbiamo:

Profilo interno: $\rho = \rho_0 - R_r$ Profilo esterno: $\rho = -(\rho_0 + R_r)$

Condizione affinché non si verifichi sottotaglio è che la somma delle curvature di camma e rotella (o fresa) sia positiva, cioè:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_r} > 0 \quad (2)$$

Per il *profilo interno* si ha quindi: $\frac{1}{\rho_0 - R_r} + \frac{1}{R_r} > 0$

$$\frac{1}{\rho_0 - R_r} + \frac{1}{R_r} = \frac{R_r + \rho_0 - R_r}{(\rho_0 - R_r)R_r} = \frac{\rho_0}{(\rho_0 - R_r)R_r} > 0 \quad \frac{\rho_0}{(\rho_0 - R_r)} > 0$$

Se ρ_0 è positivo deve risultare: $\rho_0 > 0$ (3)
 $\rho_0 > R_r$

Se ρ_0 è negativo deve risultare: $\rho_0 < 0$ (4) (è sempre verificata)
 $\rho_0 < R_r$

Per il *profilo esterno* risulta invece: $\frac{1}{-(\rho_0 + R_r)} + \frac{1}{R_r} > 0$

$$\frac{1}{-(\rho_0 + R_r)} + \frac{1}{R_r} = \frac{R_r - \rho_0 - R_r}{-(\rho_0 + R_r)R_r} = \frac{-\rho_0}{-(\rho_0 + R_r)R_r} > 0 \quad \frac{\rho_0}{(\rho_0 + R_r)} > 0$$

Se ρ_0 è positivo deve risultare: $\rho_0 > 0$
 $\rho_0 > -R_r$ (5) (è sempre verificata)

Se ρ_0 è negativo deve risultare: $\rho_0 < 0$
 $\rho_0 < -R_r$ (6)

Dalla (3) e dalla (6) risulta in conclusione che deve essere: $|\rho_0| > R_r$.

Abbiamo quindi ottenuto la relazione (1).

Possiamo anche osservare che quando il profilo primitivo è concavo ($\rho_0 < 0$) non si hanno mai problemi per il profilo interno (vedi equazione (4)); è il profilo esterno che può essere soggetto a sottotaglio.

Al contrario, quando il profilo primitivo è convesso ($\rho_0 > 0$), è il profilo esterno che non ha problemi di sottotaglio (vedi equazione (5)), mentre il profilo interno può esserne affetto.

Se vogliamo ragionare in termini di profilo camma, dovendo valere la (2) deve essere:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_r} = \frac{\rho + R_r}{\rho R_r} > 0 \quad \frac{\rho + R_r}{\rho} > 0$$

Se ρ è positivo deve risultare: $\rho > 0$
 $\rho > -R_r$ (è sempre verificata)

Se ρ è negativo deve risultare: $\rho < 0$
 $\rho < -R_r$

Possiamo concludere che il sottotaglio può verificarsi quando il profilo camma è concavo (il materiale non sta dalla parte del centro di curvatura K).

Infine, per quanto riguarda il taglio con una fresa avente raggio R_f diverso da quello della rotella, deve valere ancora la (2) in cui si sostituisce R_f a R_r :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_f} > 0 \quad \text{ovvero:} \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_f} = \frac{\rho + R_f}{\rho R_f} > 0 \quad \frac{\rho + R_f}{\rho} > 0$$

Se ρ è positivo deve risultare: $\rho > 0$
 $\rho > -R_f$ (è sempre verificata)

Se ρ è negativo deve risultare: $\rho < 0$
 $\rho < -R_f$

Possiamo concludere che anche in questo caso il sottotaglio può verificarsi quando il profilo camma è concavo (il materiale non sta dalla parte del centro di curvatura K).

Inoltre, qualora risulti $R_f \leq R_r$, e non si abbia sottotaglio nei confronti del rullo, non si hanno problemi nemmeno durante il taglio con la fresa.

Se, al contrario, è $R_f \geq R_r$, e si ha sottotaglio nei confronti del rullo, a maggior ragione si incontrano problemi nel taglio con la fresa.

4.4 Tracciamento del profilo camma con il Metodo Analitico dell'Involuppo

4.4.1 Involuppo di una famiglia di curve

Sia $S\{\gamma_c\}$ una famiglia di curve su un piano (x,y) dipendenti dal parametro c. Una curva γ è detta involuppo della famiglia S se:

- 1) per ogni punto della curva γ è possibile trovare una curva γ_c della famiglia che sia tangente a γ nel punto;
- 2) per ogni curva γ_c della famiglia è possibile trovare un punto di γ nel quale la curva γ_c sia tangente a γ ;
- 3) nessuna curva della famiglia ha un segmento in comune con la curva γ .

Teorema:

Siano le curve γ_c della famiglia S descritte dall'equazione $F(x, y, c)=0$, con F continua e continuamente differenziabile per tutti i suoi argomenti in un intorno del punto (x_0, y_0, c_0) .

Se nel punto (x_0, y_0, c_0) sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$F(x_0, y_0, c_0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{array} \right|_{(x_0, y_0, c_0)} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = 0$$

Allora in un intorno del punto (x_0, y_0) e per valori di c appartenenti ad un intorno di c_0 , esiste un involuppo della famiglia di curve $F(x, y, c)=0$.

L'equazione dell'involuppo è ottenibile dalle due seguenti equazioni: $F(x, y, c) = 0$
 $\frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0$

esprimendo x e y come funzioni del parametro c oppure esprimendo c come funzione delle due variabili x, y e introducendo c nell'equazione: $F(x, y, c(x, y)) = 0$

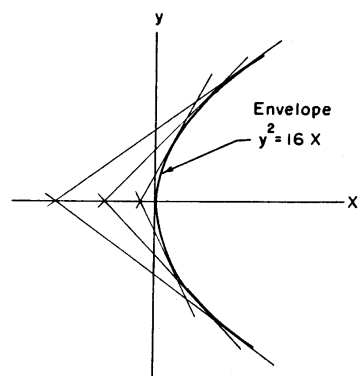
Esempio

Si consideri la famiglia di rette espressa dall'equazione: $y - cx - \frac{4}{c} = 0$

La derivata rispetto al parametro c è: $\frac{\partial F}{\partial c} = -x + \frac{4}{c^2} = 0$

Ricavando c dalla seconda equazione e introducendolo nella prima si ha: $y^2 = 16x$,

ovvero l'equazione di una parabola simmetrica rispetto all'asse x e passante per l'origine.



Esempio

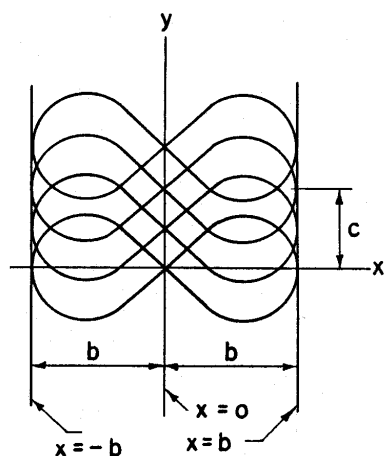
Si consideri la famiglia di curve espressa dall'equazione: $[x^2 + (y - c)^2]^2 - b^2[x^2 - (y - c)^2] = 0$ rappresentata in figura.

La derivata rispetto al parametro c è: $\frac{\partial F}{\partial c} = (y - c)[2x^2 + 2(y - c)^2 + b^2] = 0$

Una soluzione è $y=c$, che introdotta nella prima equazione fornisce $x^2(x^2 - b^2) = 0$ che ha tre soluzioni: $x=b$; $x=-b$; $x=0$.

Le prime due sono curve involuppo della famiglia, mentre non lo è la terza in quanto consiste nei punti di nodo delle curve della famiglia.

Nessuna altra curva involuppo si ottiene per la soluzione $y \neq c$

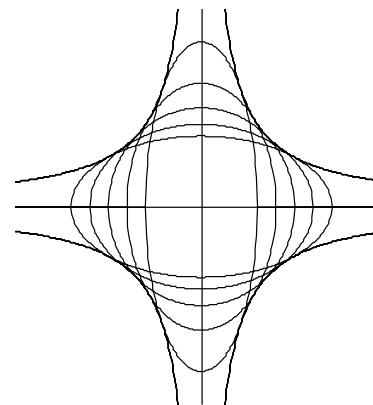


Esempio

Si consideri la famiglia di ellissi di equazione: $\left(\frac{yc}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{bc}\right)^2 - 1 = 0$ rappresentata in figura ($a=b=1, c=-1 \dots 1$).

La derivata rispetto al parametro c è: $\frac{\partial F}{\partial c} = 2c\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{2}{c^3}\left(\frac{x}{b}\right) = 0$

Che ha le seguenti soluzioni per il parametro c : $c = \pm \frac{\sqrt{yxab}}{yb}$ $c = \pm \frac{\sqrt{-yxab}}{yb}$



Introducendo queste nella prima equazione si ottiene l'equazione delle curve involuppo della famiglia di ellissi:

$$yx = \pm \frac{ab}{2}$$

E' l'equazione di un asteroide (due iperboli).

4.4.2 Determinazione delle coordinate del profilo camma

Una volta nota la legge di moto $s=s(\theta)$, le coordinate del profilo camma si possono ottenere applicando la teoria dell'involuppo.

Per meccanismi con cedente a rotella si otterranno due curve involuppo: una interna ed una esterna. Quella interna sarà impiegata per le camme a disco, entrambe per le camme a solco (con scanalatura).

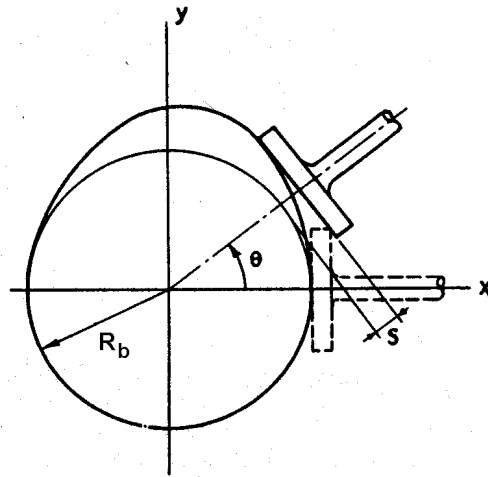
4.4.3 Camma a disco con punteria a piattello.

Con riferimento alla figura, la distanza radiale del punto di riferimento dal centro di rotazione della camma è:

$$R = R_b + s(\theta)$$

Applichiamo il metodo della inversione cinematica.

In corrispondenza del generico valore θ_i dell'angolo di rotazione della camma, il punto di riferimento va ad occupare la posizione $P_i = (R, \theta_i) = (x_i, y_i)$, dove:



Il coefficiente angolare m_i della retta passante per il punto P_i e la sua intersezione b_i con l'asse y sono, rispettivamente:

$$m_i = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right) = -\operatorname{ctg}(\theta_i) \quad b_i = \frac{R}{\sin \theta_i}$$

L'equazione di tale retta è dunque: $y = m_i x + b_i$

Pertanto l'equazione della famiglia di rette che rappresentano tutte le posizioni occupate dal piattello è data da:

$$y = m x + b = -x \operatorname{ctg} \theta + \frac{R}{\sin \theta} = \frac{-x \cos \theta + R}{\sin \theta}$$

$$F(x, y, \theta) = y - m x - b = y \sin \theta + x \cos \theta - R = 0 \quad (1)$$

Derivando rispetto a θ si ottiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = y \cos \theta - x \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} = 0 \quad (2)$$

Risolvendo le equazioni (1) e (2) si ottengono le coordinate del profilo camma:

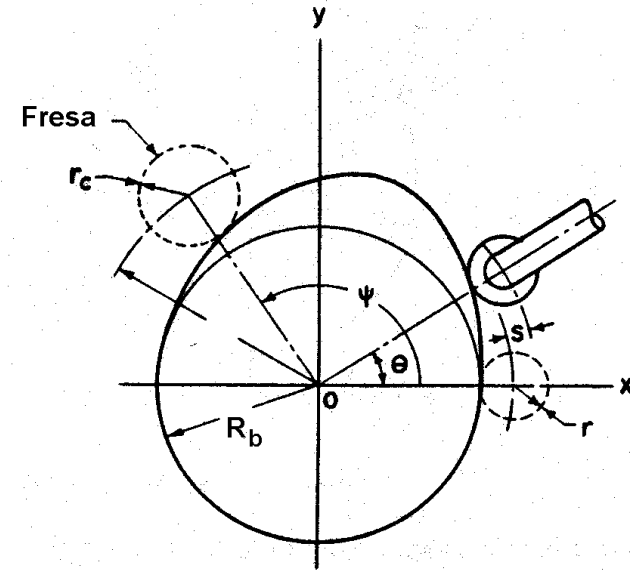
$$x = R \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta$$

$$y = R \sin \theta + \frac{ds}{d\theta} \cos \theta$$

4.4.4 Camma a disco con punteria a rotella centrata.

Con riferimento alla figura, la distanza radiale del punto di riferimento dal centro di rotazione della camma è:

$$R = R_b + r + s(\theta)$$



Applichiamo il metodo dell'inversione cinematica.

In corrispondenza del generico valore θ_i dell'angolo di rotazione della camma, l'asse della rotella va ad occupare la posizione $P_i = (R, \theta_i)$. L'equazione della circonferenza di raggio pari a quello della rotella e centro in P_i è, in coordinate cartesiane, la seguente:

$$(x - R \cos \theta_i)^2 + (y - R \sin \theta_i)^2 = r^2$$

Pertanto l'equazione della famiglia di curve che rappresentano tutte le posizioni occupate dalla rotella è:

$$F(x, y, \theta) = (x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

Derivando rispetto a θ si ottiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 2(R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \cos \theta)(x - R \cos \theta) - 2(R \cos \theta + \frac{ds}{d\theta} \sin \theta)(y - R \sin \theta) = 0 \quad (4)$$

Risolviendo le equazioni (3) e (4) si ottengono le coordinate del profilo camma:

$$x = \frac{R^3 \cos \theta + R K^2 \cos \theta \pm r \sqrt{M}}{R^2 + K^2}$$

$$y = \frac{-x \frac{ds}{d\theta} \cos \theta + x R \sin \theta + \frac{ds}{d\theta} R}{\frac{ds}{d\theta} \sin \theta + R \cos \theta}$$

con:

$$K = \frac{ds}{d\theta}$$

$$M = R^4 \cos^2 \theta + 2R^3 K \sin \theta \cos \theta + R^2 K^2 + 2R K^3 \sin \theta \cos \theta + K^4 \sin^2 \theta$$

5. Esempio

Consideriamo una camma con punteria centrata a rotella. In Figura 1 è rappresentata la legge di moto della punteria (in mm). E' di tipo cicloidale e presenta un tratto di salita e due di discesa; tra due tratti attivi è presente una sosta. La Figura 2 riporta gli andamenti di velocità e accelerazione geometriche, $s'(\theta)$ e $s''(\theta)$.

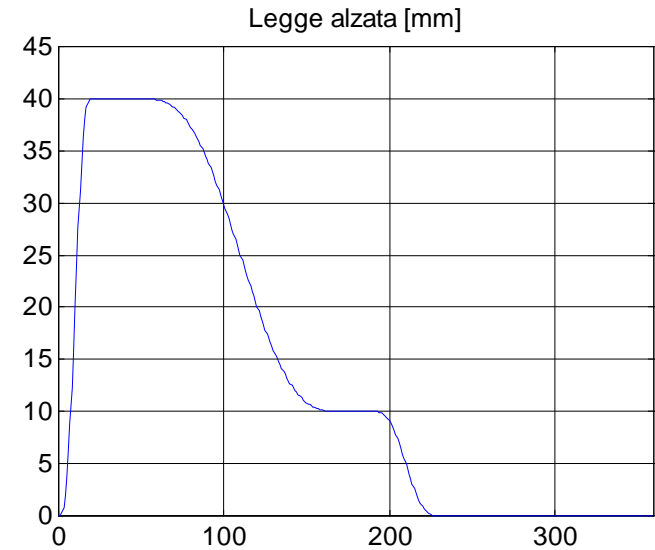


Figura 1 – Legge di alzata $s(\theta)$ in mm

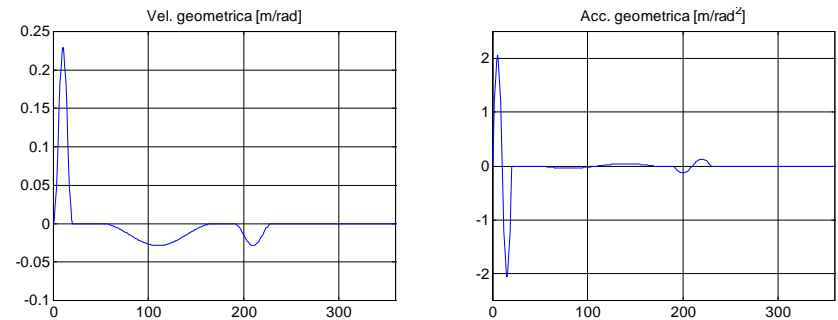


Figura 2 – Velocità s' [m/rad] e accelerazione s'' [m/rad²]

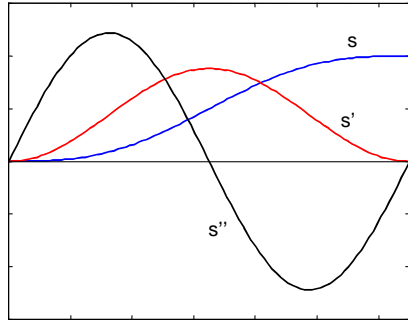
Ricordiamo le espressioni della legge di moto cicloidale.

$$s(\theta) = H_i \left[\frac{(\theta - \theta_i)}{\beta_i} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(\theta - \theta_i)}{\beta_i}\right) \right]$$

dove:
 H_i è l'alzata (positiva se di salita)
 θ_i è l'angolo di partenza della legge
 β_i è l'angolo di "apertura" della legge

$$s'(\theta) = \frac{ds}{d\theta} = \frac{H_i}{\beta_i} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(\theta - \theta_i)}{\beta_i}\right) \right]$$

$$s''(\theta) = \frac{d^2s}{d\theta^2} = \frac{2\pi H_i}{\beta_i^2} \sin\left(\frac{2\pi(\theta - \theta_i)}{\beta_i}\right)$$



La Figura 3 rappresenta la camma che si ottiene con i seguenti valori di raggio base e raggio rotella:

$R_b = 70 \text{ mm}$ $R_r = 5 \text{ mm}$

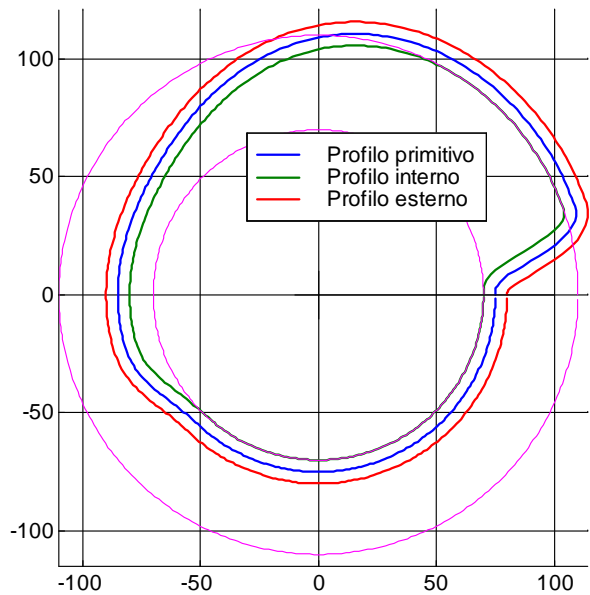


Figura 3

Vediamo cosa succede al diminuire del raggio base: Figura 4.
 Ora i valori di raggio base e raggio rotella sono i seguenti:

$R_b = 30 \text{ mm}$ $R_r = 5 \text{ mm}$

In queste condizioni si verifica sottotaglio nelle zone contraddistinte con A e B (vedi ingrandimenti di Figura 5).

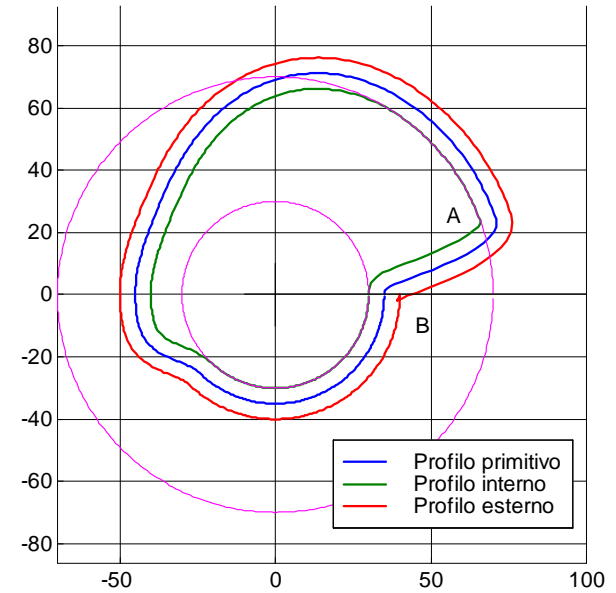


Figura 4

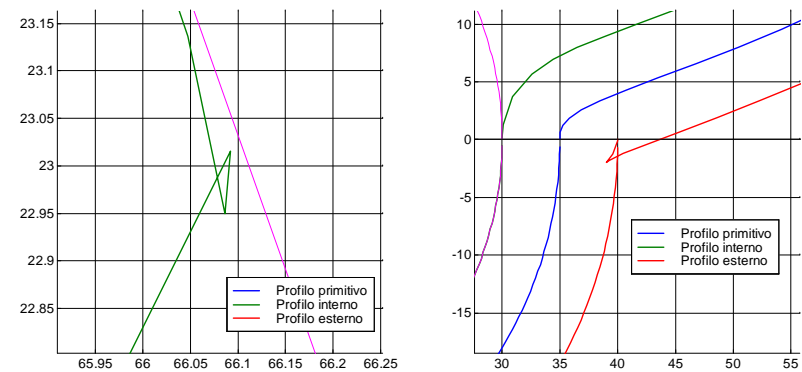


Figura 5

In Figura 6 è riportato l'andamento del raggio di curvatura del profilo primitivo (in valore assoluto). Come si può notare dall'ingrandimento di Figura 7, esso scende al di sotto del valore limite rappresentato dal raggio del rullo in corrispondenza di due zone.

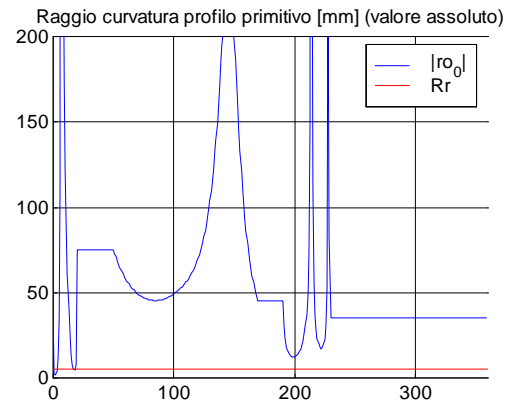


Figura 6

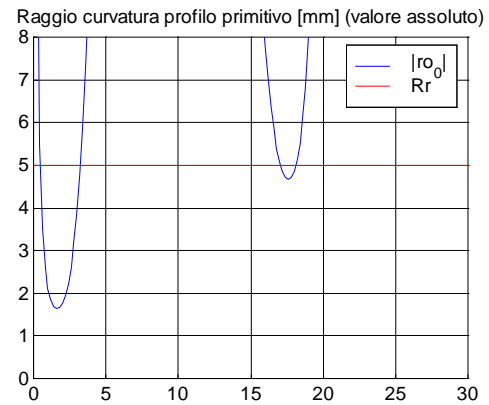


Figura 7