

**MECCANICA APPLICATA
 ALLE MACCHINE LM**

prof. Alessandro RIVOLA
 Tel. 0543.374441
 alessandro.rivola@unibo.it

SISTEMI ARTICOLATI

IL QUADRILATERO ARTICOLATO.

Regola di Grashof

Siano a il lato più corto, b il lato più lungo, c e d le aste intermedie.

- $a + b < c + d$ quadrilateri di Grashof (Figura 1: primo, secondo e quarto caso)
- $a + b > c + d$ quadrilateri non di Grashof (Figura 1: terzo, quinto e sesto caso)
- $a + b = c + d$ caso limite (Figura 2)

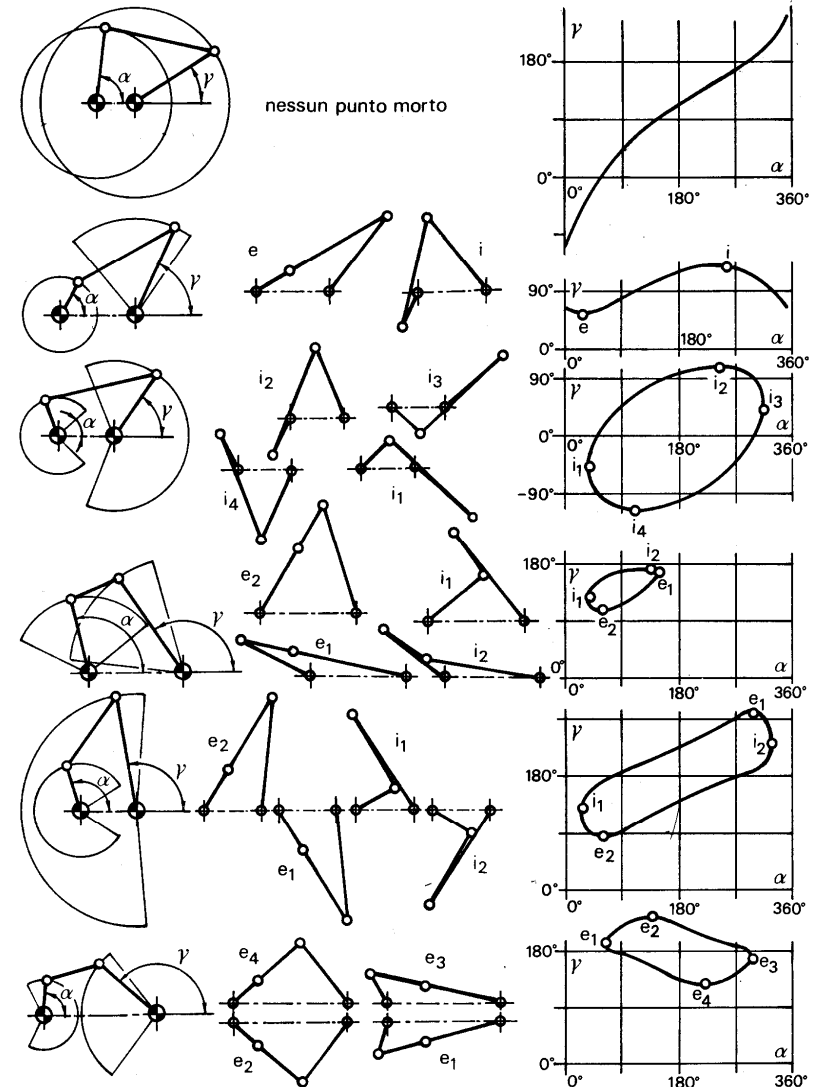


Figura 1

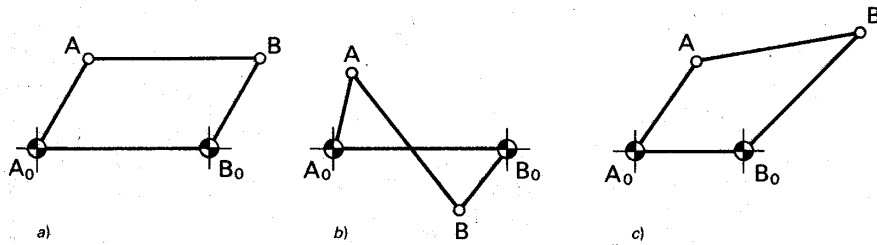


Figura 2 – Parallelogramma articolato (a); antiparallelogramma articolato (b); quadrilatero isoscele (c).

I meccanismi visti possono presentarsi in modo assai diverso dallo schema cinematica che li rappresenta. Ciò si verifica quando i raggi delle coppie rotoidale assumono valori dell'ordine di grandezza della lunghezza delle aste. Si veda per esempio l'eccentrico a collare (Figura 3).

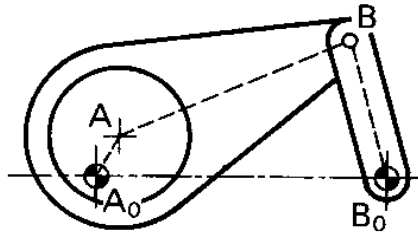


Figura 3

Un altro caso si verifica quando un perno viene sostituito con una guida circolare concentrico con il perno stesso (Figura 4a e 4b). Per un funzionamento corretto è bene che la forza nella coppia prismatica attraversi la superficie di contatto. Ciò si può ottenere disponendo la cerniera vicino alle superfici della coppia prismatica.

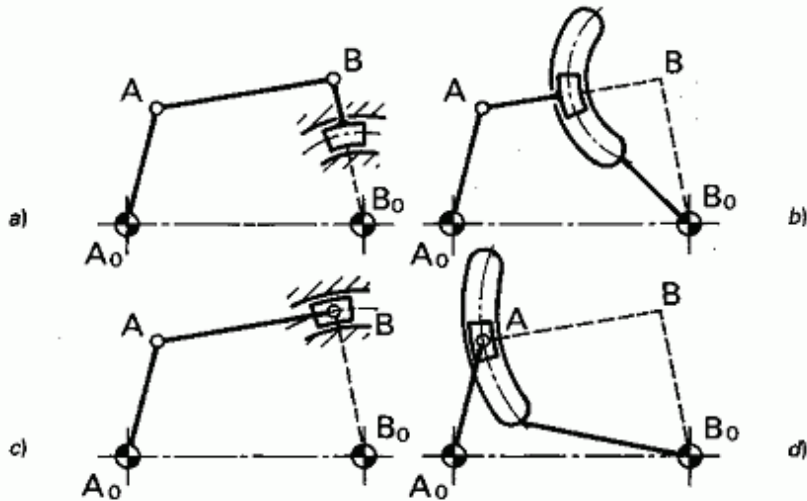


Figura 4

Traiettorie di punti di biella aventi forma qualunque possono ottenersi mediante **pentalateri** azionando opportunamente le aste adiacenti al telaio (Figura 5a). I pentalateri hanno due gradi di libertà. Infatti tutti i sistemi articolati piani con 1 solo grado di libertà hanno un numero di membri pari. Se si ha la necessità di ricondursi al caso di un solo gdl, si devono vincolare in qualche modo le aste adiacenti al telaio (Figura 5b e 5c).

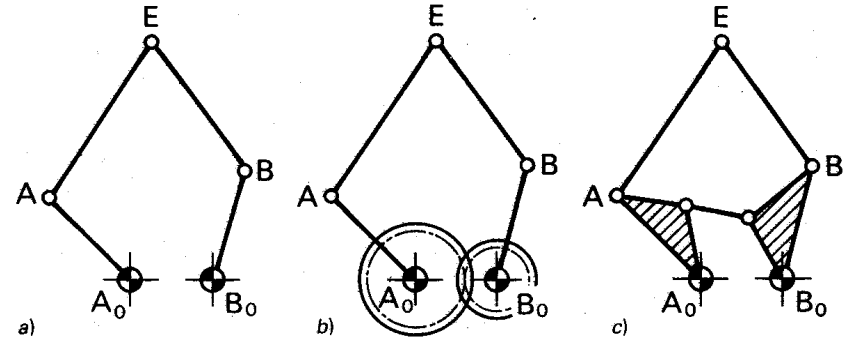


Figura 5

SINTESI DI UN QUADRILATERO ARTICOLATO MANOVELLA – BILANCIERE.
(per la trasformazione di un moto rotatorio continuo in un moto rotatorio alterno)

Iniziamo col richiamare la definizione di **punti morti** del bilanciante.
Si tratta delle posizioni estreme del bilanciante. Esse si verificano quando il membro opposto al bilanciante (la manovella) si trova allineato con la biella (il membro opposto al telaio).
Dette AB la lunghezza di biella, O_1A il raggio di manovella e O_3B la lunghezza del bilanciante, i punti morti si determinano graficamente (vedi Figura 1) intersecando la circonferenza di centro O_3 e raggio O_3B con le circonferenze di centro O_1 e raggi $(AB + O_1A)$ e $(AB - O_1A)$. I due punti morti così trovati sono rispettivamente B' e B'' .

Si debba progettare un q.a. tale che il bilanciante (membro cedente) compia oscillazioni di ampiezza β assegnata e, nello stesso tempo, con tempi di andata e ritorno prestabiliti.
In altre parole, se la manovella ruota a velocità angolare costante, essa deve compiere angoli prefissati durante le due corse del bilanciante.

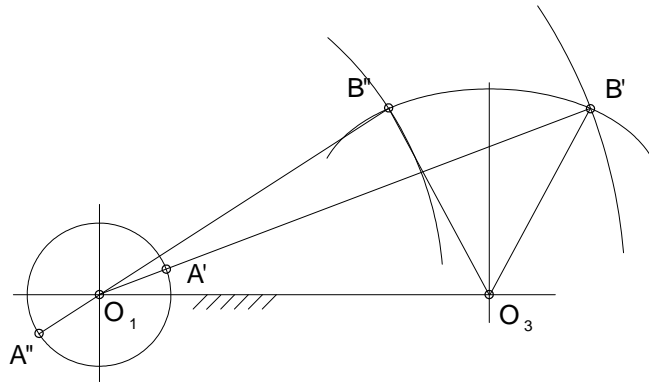


Figura 1

Con riferimento alla Figura 2, notiamo che, indicati con Ω la velocità angolare (costante) di manovella, con φ_a e φ_r gli angoli corrispondenti ai tempi di andata e ritorno del bilanciante, si ha:

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_a + t_r} \quad \varphi_a = \Omega t_a = 2\pi \frac{t_a}{t_a + t_r} \quad \varphi_r = \Omega t_r = 2\pi \frac{t_r}{t_a + t_r}$$

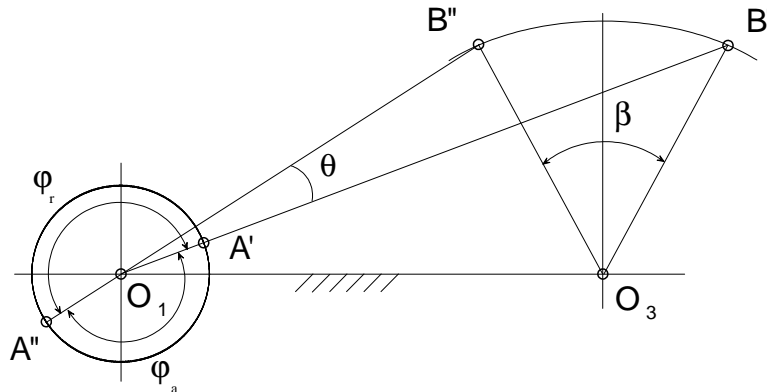


Figura 2

Definito θ l'angolo differenza tra π e l'angolo di andata φ_a , il quadrilatero che risponde alle esigenze specificate si ottiene seguendo il procedimento seguente (Figura 3):

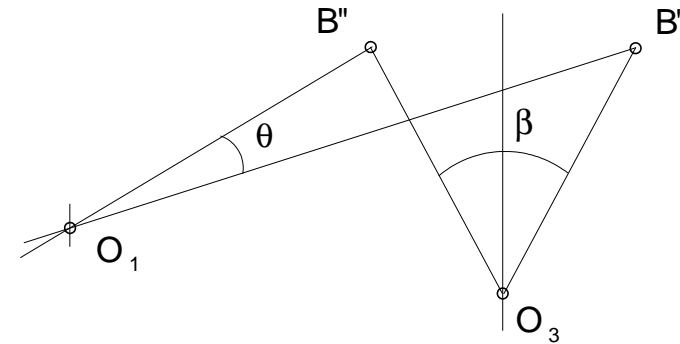


Figura 3

Dal punto O_3 si tracci un raggio di lunghezza arbitraria O_3B' .
Da O_3 si tracci un secondo raggio formante con O_3B' l'angolo β e si prenda su di esso un punto B'' tale che $O_3B' = O_3B''$.
Da B' si tracci una retta qualunque.
Da B'' si tracci una retta formante con quella uscente da B' l'angolo θ .
Le due rette si incontrano nel centro O_1 di manovella.

Posto:
 $O_1A = r$ raggio di manovella
 $AB = l$ lunghezza di biella

deve essere $O_1B' = l+r$ e $O_1B'' = l-r$ da cui si ricava il raggio di manovella $r = (O_1B' - O_1B'')/2$

In Figura 4 è rappresentato il quadrilatero così ottenuto. Come è ovvio, il problema ammette infinite soluzioni. Infatti la lunghezza del raggio O_3B' è stata scelta con arbitrio, come anche la retta uscente da B' .

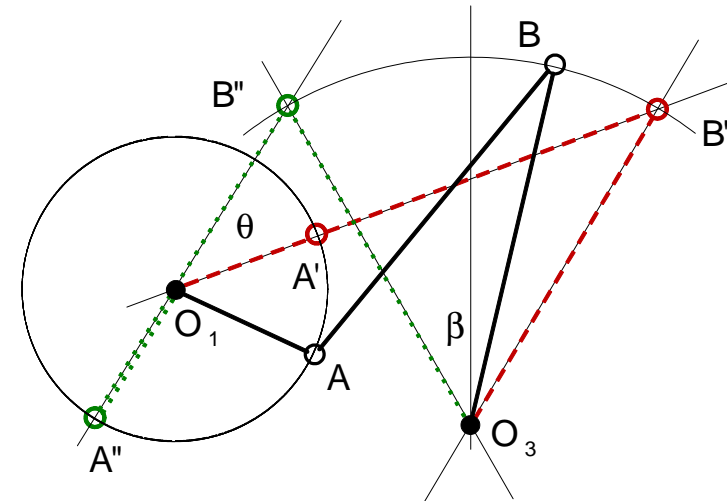


Figura 4

Dal momento che tutti i punti O_1 che soddisfano il problema vedono il segmento $B'B''$ sotto lo stesso angolo θ , significa che devono appartenere alle due circonferenze passanti per B' e B'' ed aventi centro sulla bisettrice dell'angolo β (da parti opposte rispetto al segmento $B'B''$) e raggio R pari a (vedi Figura 5):

$$R = O_3B' \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \theta} = OB'$$

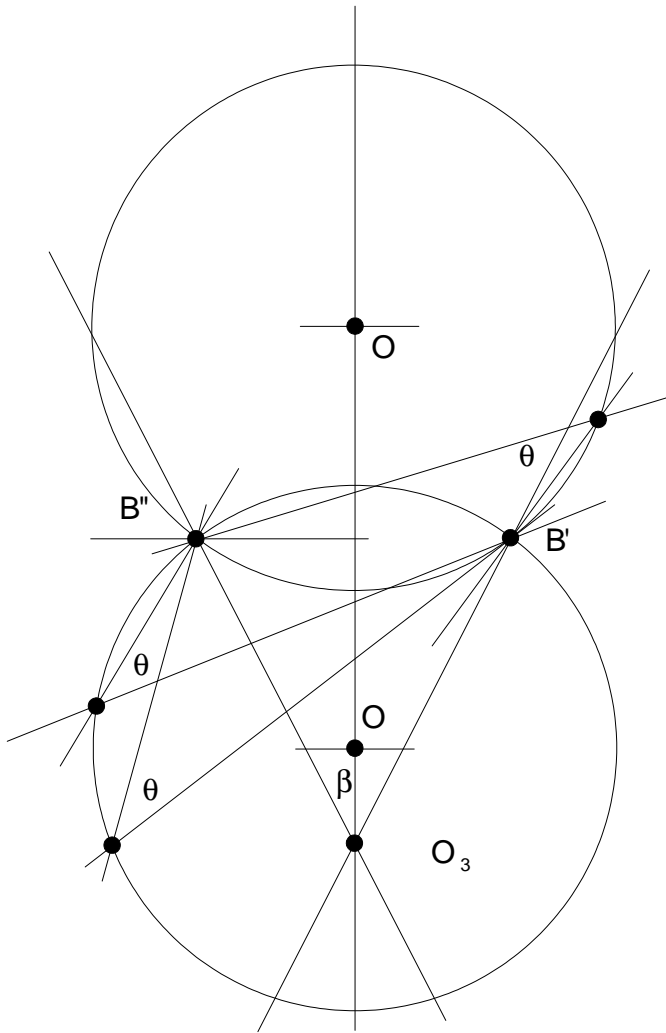


Figura 5

Non tutti i punti giacenti sulle due circonferenze menzionate sono posizioni ammissibili per il centro di rotazione di manovella. Si può infatti dimostrare che per permettere il moto senza rompere i vincoli, il punto O_1 deve mantenersi esterno all'angolo di vertice O_3 e apertura β .

Vista la suddetta limitazione, ne consegue un valore limite per l'angolo θ . Infatti al variare di θ varia il raggio R (ad esempio per valori di $\theta < \pi/2$ un aumento di θ implica una diminuzione di R). Di conseguenza si modificano i campi ammissibili per il punto O_1 . Non esistono più zone ammissibili per O_1 quando θ raggiunge il valore limite (vedi Figura 6):

$$\theta_{lim} = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$$

L'esistenza di un valore limite per l'angolo θ introduce una limitazione per quanto riguarda il rapporto tra gli angoli descritti dalla manovella in corrispondenza delle due corse del bilanciare:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \pi - \theta & \frac{\pi + \theta}{\pi - \theta} < \frac{\pi + \theta_{lim}}{\pi - \theta_{lim}} = \frac{3\pi + \beta}{\pi - \beta} & \text{ed anche: } \frac{\varphi_r}{\varphi_a} = \frac{t_r}{t_a} < \frac{3\pi + \beta}{\pi - \beta} \\ \varphi_r &= \pi + \theta \end{aligned}$$

Ad esempio se $\beta = \pi/2$ si ha (per l'evidente intercambiabilità tra t_a e t_r) $\frac{1}{7} < \frac{t_r}{t_a} < 7$.

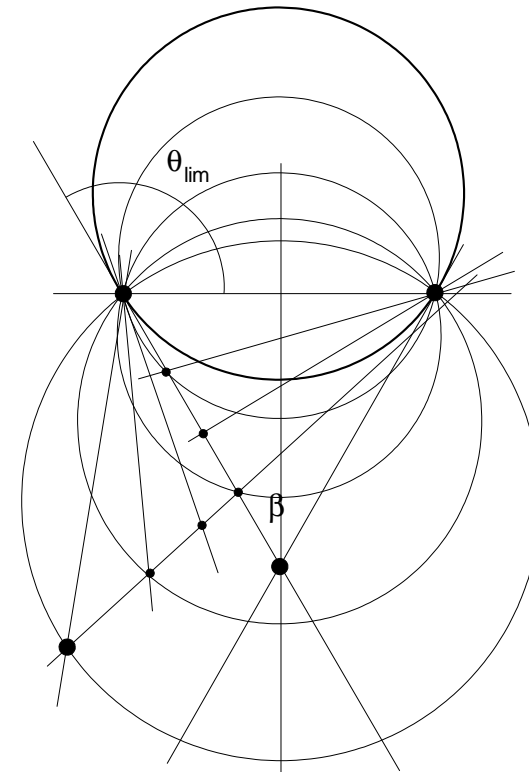


Figura 6

In ogni caso la soluzione non è ancora unica. Il problema risulta definito (naturalmente entro i limiti fra i quali la soluzione è possibile) se, ad esempio, si fissa il valore del rapporto O_1O_3/O_3B' .

Talvolta è conveniente definire il problema cercando di ottimizzare il valore dell'angolo di trasmissione (l'angolo compreso tra bilanciere e biella).

GENERAZIONE DI MOVIMENTI – SINTESI GRAFICA

Primo problema

Segmento di biella per due posizioni.

E' sufficiente far ruotare il piano contenente il segmento AB attorno al punto P_{12} (individuato intersecando gli assi dei segmenti A_1A_2 e B_1B_2) di un angolo pari a quello compreso tra le due posizioni che il segmento deve assumere (Figura 7).

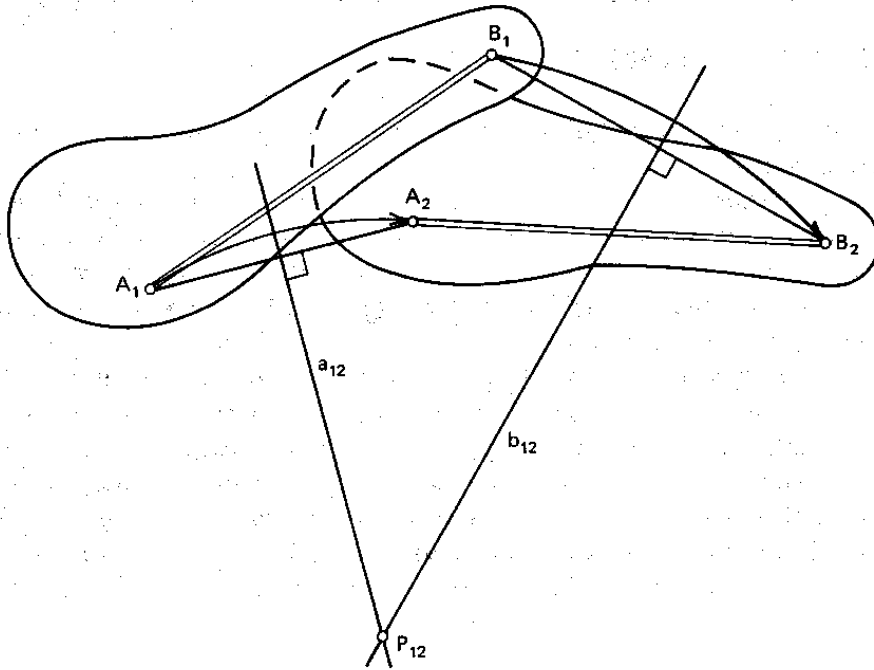


Figura 7

Se tale soluzione non fosse conveniente si può ricorrere ad un quadrilatero articolato con l'unica condizione che i centri delle aste adiacenti al telaio cadano sugli assi dei segmenti A_1A_2 e B_1B_2 (Figura 8). Ci sono infinite soluzioni che si riducono a quattro se per esempio si fissano le lunghezze delle aste adiacenti al telaio. La soluzione e' unica se si stabilisce su quale dei due semipiani devono stare i centri A_0 e B_0 .

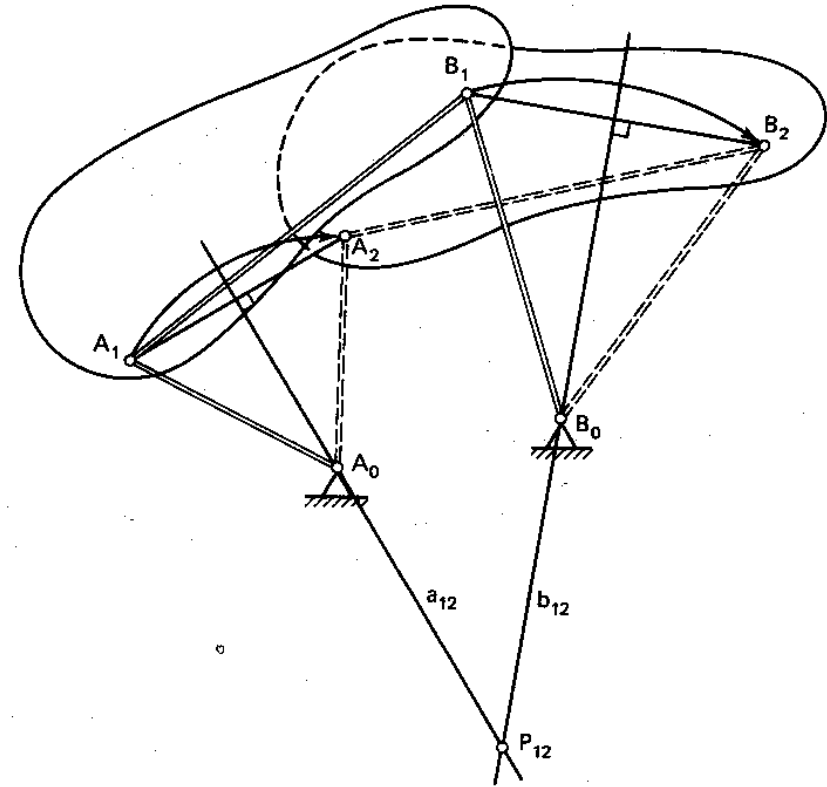


Figura 8

Se non ha interesse che gli estremi delle aste adiacenti al telaio cadano nei punti A e B, si possono fissare gli angoli ϕ_A e ϕ_B , oltre che i centri A_0 e B_0 (vedi Figura 9).

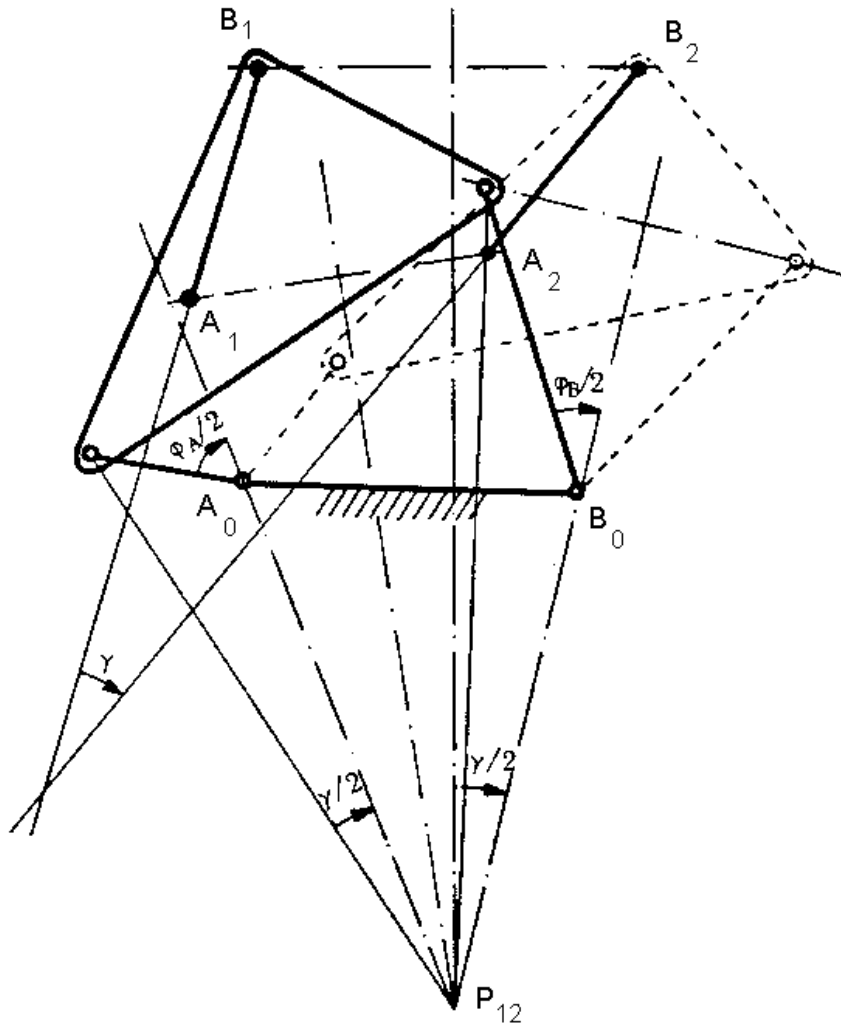


Figura 9

Secondo problema

Segmento di biella per tre posizioni.

Il quadrilatero articolato con il centro A_0 sull'intersezione degli assi A_1A_2, A_2A_3 ed il centro B_0 sull'intersezione degli assi B_1B_2, B_2B_3 risolve il problema (vedi Figura 10).

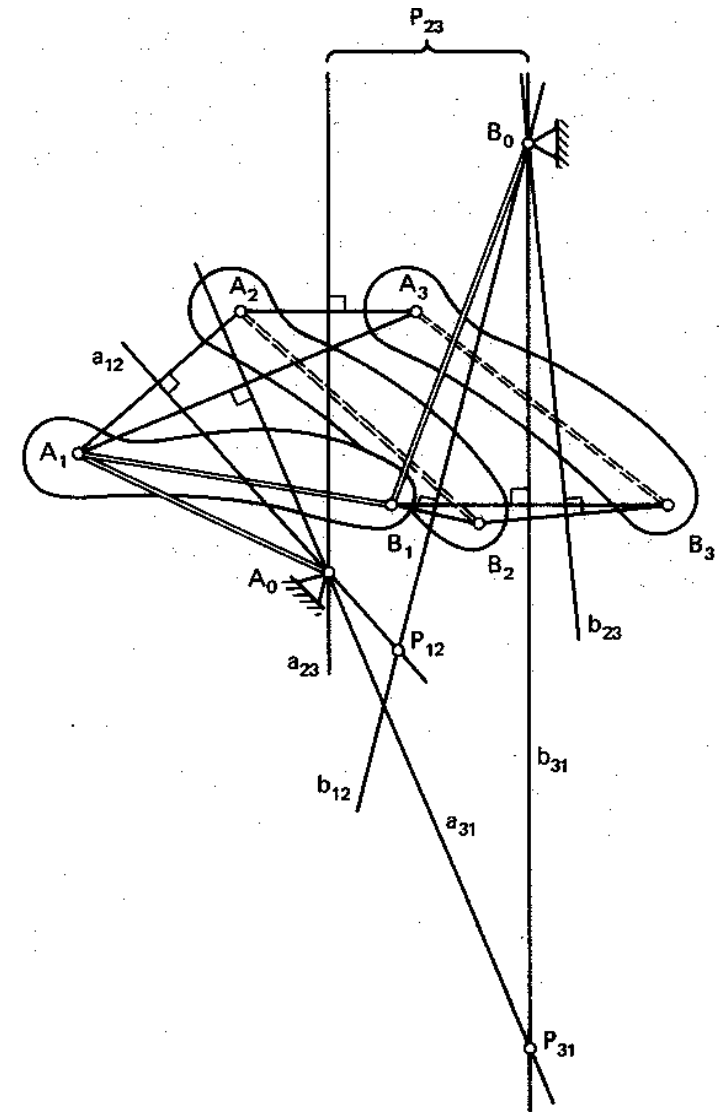


Figura 10

TRACCIAMENTO DELLE TRAIETTORIE

Di notevole interesse applicativo risultano essere le traiettorie dei punti di biella (dette anche curve di biella). Infatti queste traiettorie assumono forme molto diversificate che possono essere utilizzate per la soluzione di molti problemi progettuali.

Di solito la soluzione è possibile solo in via approssimata. In questi casi si tollera che la curva effettiva sia contenuta in una striscia a cavallo della traiettoria teorica (Figura 1a). In altri casi si impone che la traiettoria passi per un numero limitato di punti senza curarsi dell'andamento negli intervalli tra i punti stessi (Figura 1b).

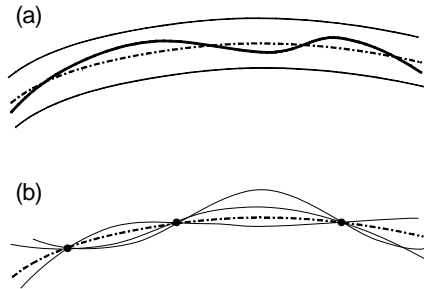


Figura 1

Si prenda in esame qualche caso in cui abbia importanza la realizzazione di una traiettoria di un punto di biella di forma prestabilita. Una gru da porto in cui il gancio debba compiere una traiettoria rettilinea orizzontale (Figura 2) e un trascinate per pellicole fotografiche (Figura 3).

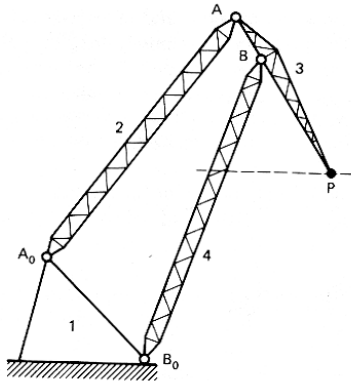


Figura 2

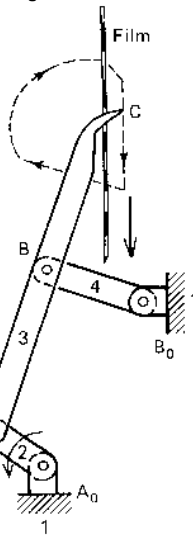


Figura 3

Il sistema articolato di Figura 4 in cui l'asta 6 debba realizzare una sosta in corrispondenza di una certa fase della rotazione completa del movente (la manovella 1). L'obiettivo viene raggiunto se, durante la medesima fase, il punto D (solidale alla biella 2 del quadrilatero articolato) percorre una traiettoria circolare di centro E.

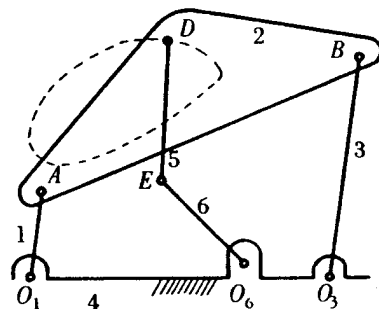


Figura 4

Per tracciare la traiettoria di un punto di un membro di un meccanismo, conviene fare riferimento alle primitive del moto. Queste due curve, rotolando tra loro, definiscono completamente il moto di un corpo rigido nel piano. Se si considera il moto assoluto di un membro, alle primitive si dà il nome di **polari** (polare fissa e polare mobile). Ricordando che le primitive sono i luoghi dei centri di istantanea rotazione, si considera la Figura 5 in cui C_{0i} e C_{1i} siano punti corrispondenti sulle due polari, ossia punti che vengono tra loro a contatto durante il rotolamento delle polari.

Vediamo come, nota la forma delle polari, si possa trovare la traiettoria di un punto P appartenente al piano mobile.

E' sufficiente individuare la posizione di P rispetto alla polare mobile facendo riferimento al punto C_{1i} mediante le due coordinate ρ_i (distanza $C_{1i}P$) e φ_i (angolo che il raggio ρ_i forma con la normale in C_{1i} alla polare mobile). Con gli stessi valori di ρ_i e φ_i si individua il punto P_i a partire dal punto C_{0i} .

Si noti che la normale condotta da un punto P_i alla traiettoria di P passa per il centro di istantanea rotazione C_{0i} . Quindi con la costruzione sopra descritta possono trovarsi non solo i punti P_i ma anche le tangenti alla traiettoria nei punti stessi.

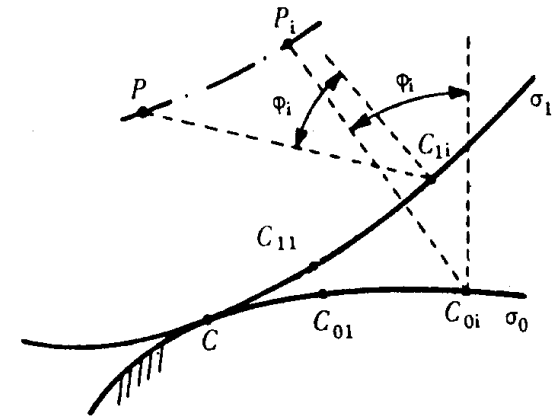


Figura 5

A volte è necessario conoscere il **raggio di curvatura** della traiettoria in corrispondenza dei singoli punti P_i . Esso può essere determinato qualora si conoscano i raggi di curvatura delle polari in corrispondenza dei vari punti C_i . Vale infatti la formula di Eulero-Savary:

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{CQ} - \frac{1}{CP} \right) \cos \varphi \quad (1)$$

dove Q è il centro di curvatura della traiettoria di P, R_0 ed R_1 sono i raggi di curvatura delle polari in corrispondenza di un generico punto C. Per il significato dell'angolo φ si faccia riferimento alla Figura 6.

Nota

una volta scelto come positivo uno dei due semipiani limitati dalla tangente comune alle due polari in C, i segmenti CO_0 , CO_1 , CP e CQ devono essere considerati positivi se i punti O_0 , O_1 , P e Q cadono nel piano positivo. Il $\cos \varphi$ è sempre positivo.

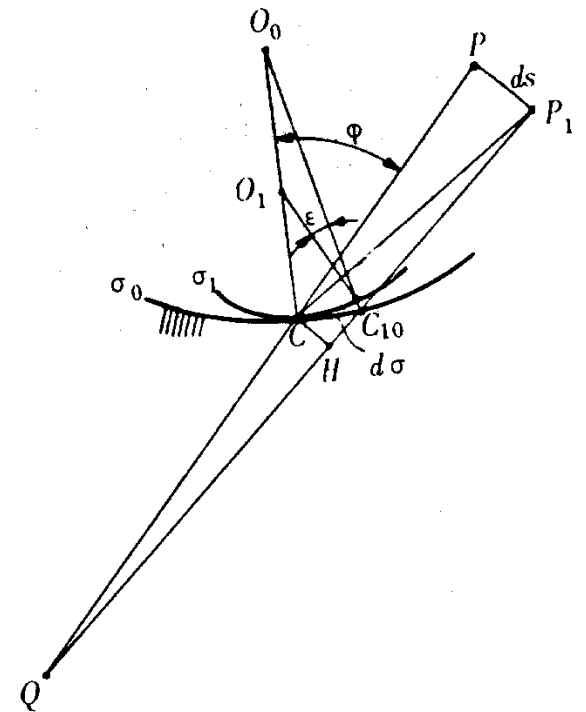


Figura 6

La formula di Eulero-Savary può essere utilizzata anche senza conoscere le polari, purché sia noto il punto C. Si consideri ad esempio il quadrilatero articolato di Figura 7 e si voglia trovare il centro di curvatura di un punto P della biella. Applicando la formula ai punti A e B dei quali si conosce la traiettoria, si perviene ad un sistema di due equazioni nelle due incognite $(1/R_0 - 1/R_1)$ e φ_A .

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{CO_1} - \frac{1}{CA} \right) \cos \varphi_A$$

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{CO_3} - \frac{1}{CB} \right) \cos(\varphi_A \pm \alpha)$$

Ricavate le due incognite, basta sostituirle nella seguente per trovare l'unica incognita CQ.

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{CQ} - \frac{1}{CP} \right) \cos(\varphi_A \pm \gamma)$$

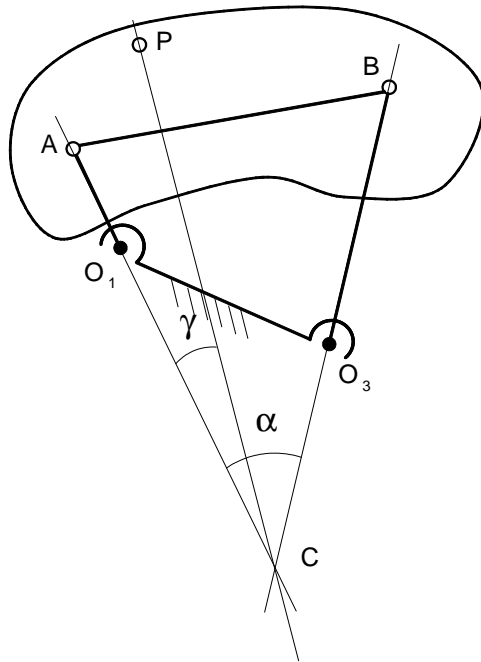


Figura 7

Per lo studio delle proprietà delle traiettorie di punti presenta notevole interesse anche la **circonferenza dei flessi**.

Si consideri ancora la formula (1). Se esistono punti del piano mobile per i quali, in una determinata posizione, la traiettoria ha curvatura nulla (raggio di curvatura infinito), indicati tali punti con F, si ha:

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{CF} \cos \varphi \quad (2)$$

Il luogo dei punti F è pertanto una circonferenza passante per C, con centro sulla normale alle polari nel punto di contatto e con diametro pari a D:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}$$

Poiché i punti F giacenti su questa circonferenza sono punti di flesso delle proprie traiettorie, alla circonferenza si dà il nome di **circonferenza dei flessi**.

Il suo tracciamento non è sempre banale. A tal fine si può osservare che applicando la (1) a due punti P ed F allineati sulla stessa retta passante per C, si ha:

$$\frac{1}{CQ} - \frac{1}{CP} = -\frac{1}{CF} \quad (3)$$

La (3) noti P e Q permette di trovare F e, al contrario, se sono noti P ed F permette di trovare Q.

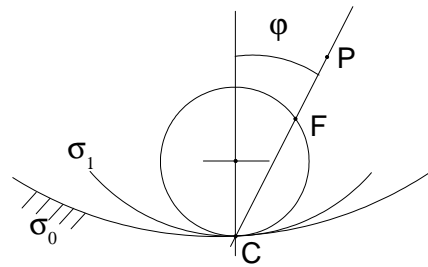


Figura 8

La (3) per un impiego più comodo può essere scritta in altra forma. Infatti, posto:

$$\begin{aligned} p &= PC \\ q &= PQ \\ f &= PF \end{aligned} \quad \text{diviene:} \quad p^2 = qf \quad (4)$$

Esempio

Come esempio di applicazione della (4) si consideri il quadrilatero articolato di Figura 9 in cui si vuole trovare il centro di curvatura del punto P della biella. Si scrive la (4) per i punti A e B trovando così i punti F_A e F_B. Si traccia la circonferenza dei flessi (è quella passante per F_A, F_B e C). Il centro Q di curvatura della traiettoria di P si trova scrivendo la (4) per il punto P.

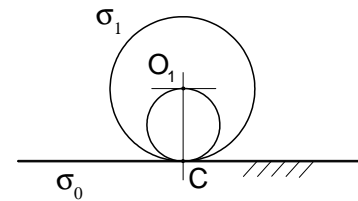


Figura 10

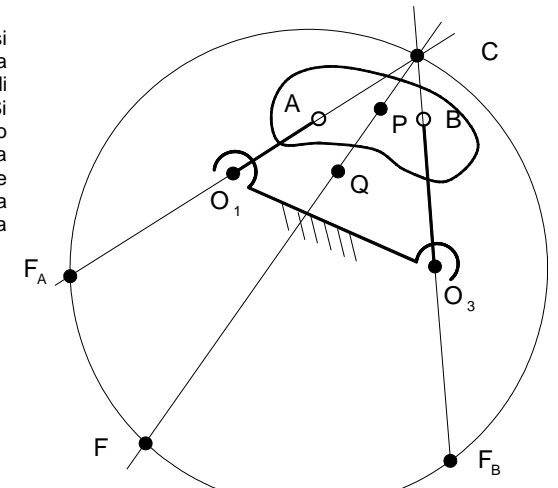


Figura 9

Esempio

Una circonferenza di raggio R₁ e centro O₁ rotola su una retta (Figura 10). Come risulta ovvio, circonferenza e retta sono rispettivamente la polare mobile sigma₁ e la polare fissa sigma₀. La circonferenza dei flessi passa, oltre che per C, anche per il punto O₁. Il risultato è ovvio poiché O₁ ha traiettoria rettilinea.

Esempio

Si riconsideri il problema della gru da porto (Figura 2) facendo ora riferimento alla Figura 11.

Note le posizioni dei punti O₃, A, B e la direzione dell'asta O₁A, si deve trovare la posizione del centro O₁ affinché D abbia traiettoria orizzontale.

Il problema può essere risolto nel seguente modo.

- Si trova il punto C (centro di istantanea rotazione assoluto della biella).
- Si applica la (4) al punto B trovando così F_B.
- Da C si manda la verticale e su di essa si fissa un punto D qualunque.
- Si traccia la circonferenza passante per C, F_B e D.
- Si determina il punto F_A intersecando tale circonferenza con la retta passante per C ed A.
- Infine, applicando la (4) ad A si trova il punto incognito O₁.

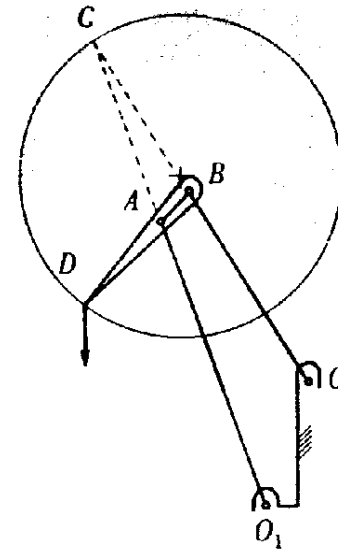


Figura 11

Esempio

Un altro caso in cui la traiettoria debba essere pressoché rettilinea è rappresentato in Figura 12 in cui il punto P della biella del quadrilatero articolato viene fatto cadere sulla circonferenza dei flessi.

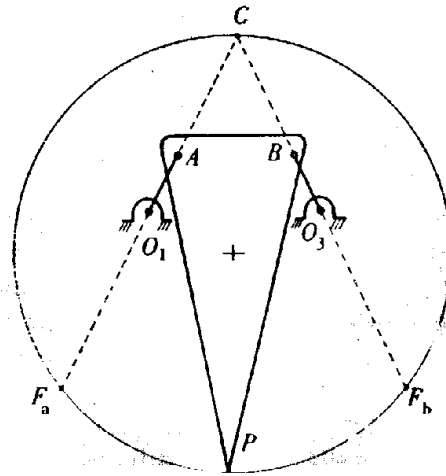


Figura 12

Impiego di atlanti

In ogni caso, per traiettorie pressoché rettilinee, ma soprattutto per traiettorie di altra forma, è conveniente fare uso di atlanti che forniscono direttamente, per un gran numero di casi, la traiettoria di un punto di biella.

In questi atlanti vengono riportate in modo sistematico le traiettorie dei punti di biella di quadrilateri in cui le lunghezze delle aste sono rapportate alla lunghezza della manovella. I quadrilateri sono rappresentati tutti nella posizione in cui la manovella A_0A è allineata con A_0B_0 (Figura 13). Per ogni quadrilatero vengono tracciate le traiettorie di una serie di punti distribuiti regolarmente sul piano di biella. Le lunghezze delle aste vengono variate in modo sistematico.

Sull'atlante di Hrones-Nelson (uno dei più famosi) sono riportate più di 7000 curve di biella. Alcuni esempi sono rappresentati nelle Figure 14 e 15.

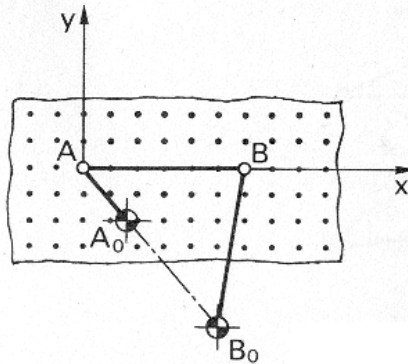


Figura 13

Dopo che il quadrilatero sia stato scelto sulla scorta dell'atlante, potrà essere opportuno controllare la posizione del centro di curvatura della traiettoria in qualche configurazione particolare; un tale controllo è possibile con l'ausilio della circonferenza dei flessi.

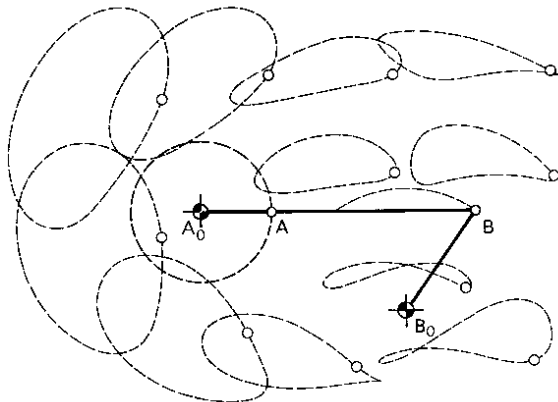


Figura 14 – Curve di biella di un quadrilatero manovella – bilanciato.

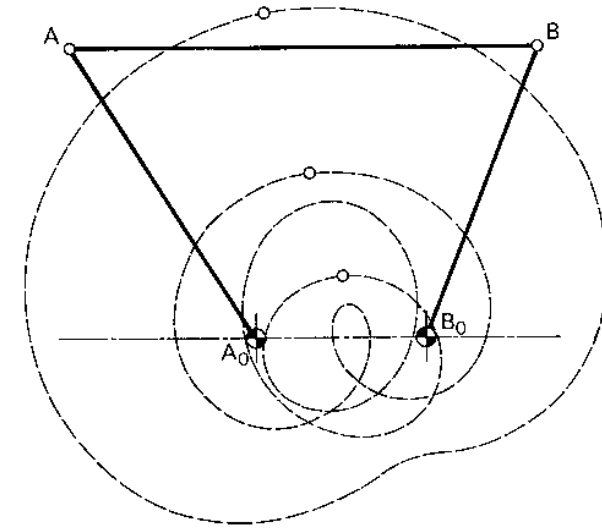


Figura 15 – Curve di biella di un quadrilatero a doppio bilanciato.

Teorema di Roberts

Una volta determinate le proporzioni di un quadrilatero che permetta di realizzare una data traiettoria di biella, è sempre possibile trovare altri due quadrilateri che diano la stessa traiettoria.

Ciò permette di scegliere il meglio proporzionato tra i quadrilateri ugualmente idonei alla soluzione del problema considerato.

La costruzione che permette di trovare i tre quadrilateri equivalenti è illustrata in Figura 16.

Sia O_1ABO_3 il quadrilatero originario e P il punto di biella di cui si considera la traiettoria. Si tracciano i parallelogrammi O_1MPA e O_3NPB . Si tracciano i triangoli MQP e PRN simili al triangolo APB . Infine si traccia il parallelogramma $PQO_7,8R$. Si osservi che anche $O_1O_7,8O_3$ è simile a APB . I quadrilateri equivalenti sono 1, 2, 3, 4 (con biella 2), 4, 5, 6, 7 (con biella 6) e 4, 8, 9, 10 (con biella 9).

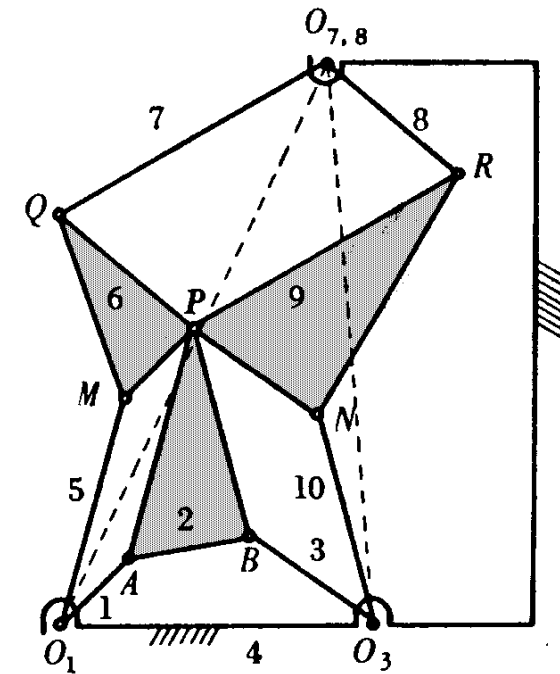
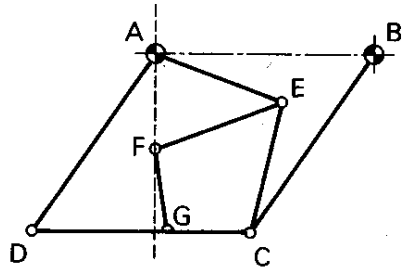


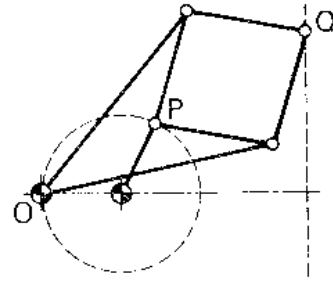
Figura 16

Guide rettilinee esatte

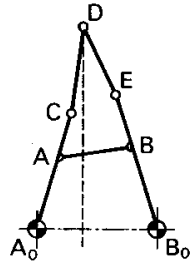
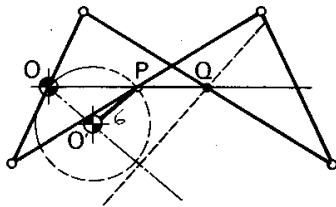
Sistemi articolati



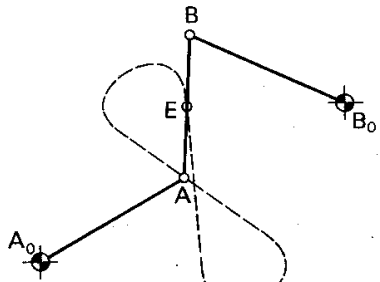
Guida di Kempe



Guida di Peaucellier

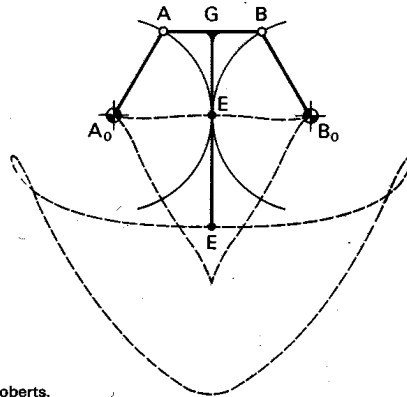


Guide rettilinee approssimate

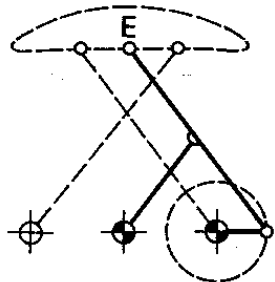


Meccanismo di Watt

Fig.



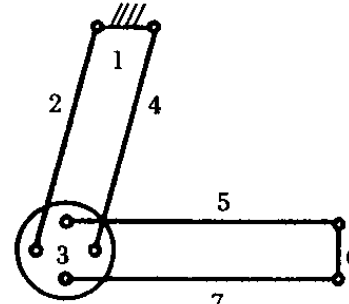
Guida di Roberts.



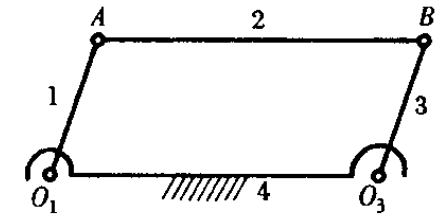
Guida di Chebyshev

Esempi di meccanismi per moto traslatorio

Sistemi articolati

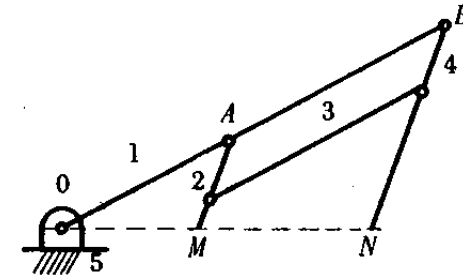


Tecnigrafo



Parallelogramma articolato

Pantografi



GENERAZIONE DI TRAIETTORIE – SINTESI GRAFICA

Tre posizioni imposte.

Il problema consiste nel progettare un quadrilatero articolato in cui un punto di biella passi per tre punti assegnati.

Le posizioni degli assi fissi A_0 e B_0 (Figura 17) sono arbitrarie. Arbitrarie sono anche la lunghezza di manovella e la distanza tra A e P. Con l'aumentare del numero di posizioni assegnate, limitazioni saranno imposte al numero di parametri che è possibile scegliere in modo arbitrario.

Il problema si risolve nel seguente modo.

Si sceglie la posizione degli assi fissi A_0 e B_0 .

Si sceglie la lunghezza di manovella e si traccia la traiettoria del punto A.

Si sceglie un punto A_1 corrispondente alla prima posizione di P, ovvero P_1 .

Risulta così fissata la distanza AP. Di conseguenza possiamo determinare le posizioni A_2 e A_3 corrispondenti rispettivamente a P_2 e P_3 .

Si osservi che A, P e B sono tutti punti della biella e perciò la loro mutua distanza non varia. Quindi, determinata la posizione di B_1 , il problema è risolto.

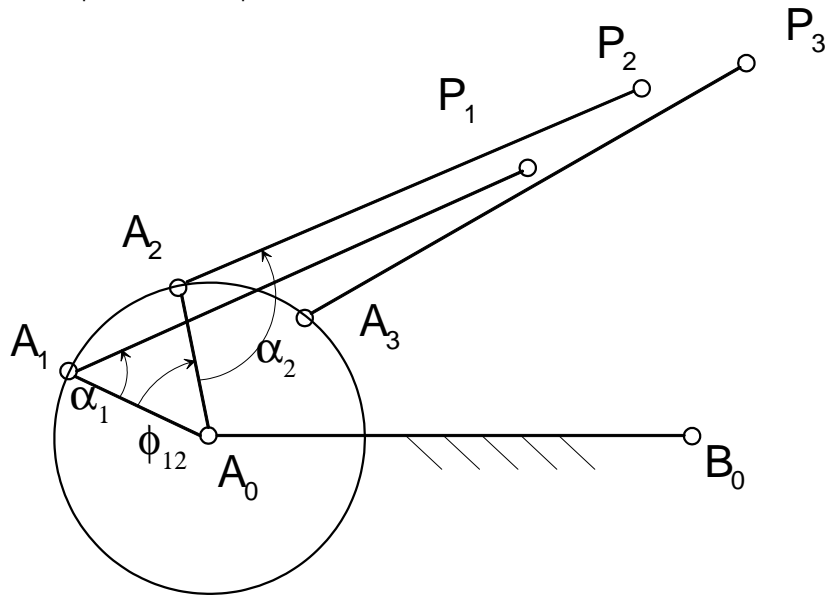


Figura 17

La posizione di B_1 (cioè la posizione di B corrispondente a P_1) si può trovare mediante inversione cinematica mantenendo fissa la biella nella posizione iniziale.

Nel meccanismo di Figura 17, nel passaggio da P_1 a P_2 , la manovella ruota dell'angolo ϕ_{12} e la biella ruota rispetto ad essa dell'angolo $\alpha_2 - \alpha_1$ in senso antiorario. Perciò, operando l'inversione cinematica (Figura 18), la manovella ruota rispetto alla biella dello stesso angolo $(\alpha_2 - \alpha_1)$ ma in senso orario. Il centro A_0 si sposta così nella posizione A_0' .

Il centro B_0 si viene a trovare nella posizione B_0' individuata dall'intersezione dell'arco di centro A_0' e raggio A_0B_0 e dell'arco di centro P_1 e raggio P_2B_0 (misurato in Figura 17).

La posizione B_0'' si trova, analogamente, intersecando l'arco di centro A_0'' (trovato ruotando la manovella dell'angolo $\alpha_3 - \alpha_1$) e raggio A_0B_0 con l'arco di centro P_1 e raggio P_3B_0 .

La posizione B_1 è il centro dell'arco passante per B_0 , B_0' e B_0'' . Per trovarla basta intersecare gli assi dei segmenti B_0B_0' e $B_0'B_0''$.

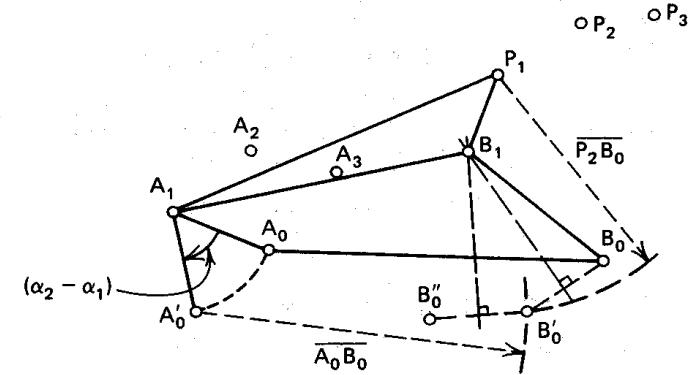


Figura 18

Disegnato il meccanismo nelle tre posizioni (Figura 19) se ne controlla l'aspetto e, se il risultato non dovesse essere soddisfacente, la procedura può essere ripetuta con scelte differenti da quelle iniziali.

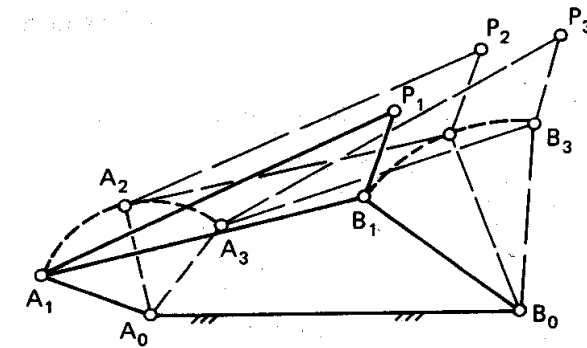


Figura 19

Occorre fare una annotazione importante a riguardo dei metodi grafici.

Quando si mandano gli assi dai segmenti B_0B_0' e $B_0'B_0''$ al fine di trovare il punto B_1 , un piccolo errore commesso può dare luogo ad una notevole imprecisione nell'individuare B_1 . Si pensi ad esempio a quello che accade se i segmenti B_0B_0' e $B_0'B_0''$ risultano quasi paralleli (Figura 20).

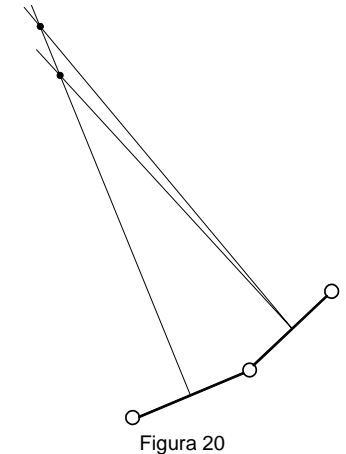


Figura 20

Sintesi Cinematica mediante Metodi Analitici

Molte tecniche matematiche sono state utilizzate per risolvere problemi di sintesi cinematica. Tra esse, metodi algebrici, metodi matriciali, numeri complessi. Per i sistemi articolati piani, la tecnica basata sui numeri complessi è la più semplice e versatile.

Premessa

Ogni meccanismo piano può essere rappresentato mediante una catena cinematica che consiste in uno o più loop di coppie di membri asta-corsoio (vedi Figura 1). Ad esempio, il manovellismo di spinta non centrato di Figura 2a può essere rappresentato come in Figura 2b a patto che le aste 2, 3 e 4 siano bloccate ai rispettivi corsoi e che le aste 1 e 4 siano solidali al telaio.

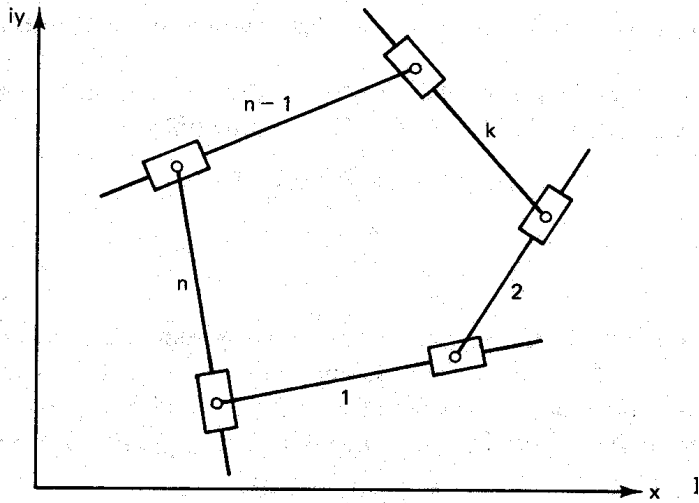


Figura 1 – Generica catena cinematica.

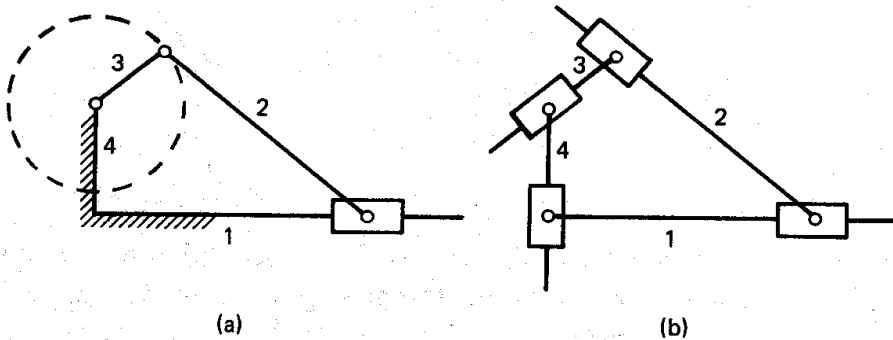


Figura 2 – Manovellismo di spinta eccentrico (a) e sua catena cinematica equivalente (b).

Nella k-esima coppia asta-corsoio, la posizione del pivot del corsoio rispetto al pivot dell'asta può essere definita mediante il vettore complesso Z_k , come rappresentato in Figura 3a. Nella posizione iniziale sia:

$$Z_k = Z_k e^{i\theta_1}$$

$$Z_k = Z_k (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

dove Z_k è la distanza tra i due pivot nella posizione di partenza e θ_1 è l'angolo misurato tra il vettore Z_k nella posizione di partenza e l'asse reale di un sistema di riferimento che trasla con il pivot dell'asta (rotazioni positive se antiorarie).

Se non varia la distanza tra i due pivot nel passare dalla posizione di partenza ad una generica posizione j, si ha (vedi Figura 3b):

$$Z_k' = Z_k e^{i\theta_j} = Z_k e^{i(\theta_1 + \phi_j)} = Z_k e^{i\theta_1} e^{i\phi_j}$$

con $\phi_j = \theta_j - \theta_1$, ovvero: $Z_k' = Z_k e^{i\theta_1} e^{i\phi_j} = Z_k e^{i\phi_j}$.

Il termine $e^{i\phi_j}$ viene chiamato operatore rotazionale poiché esprime una rotazione pura del vettore Z_k .

Se invece si ha anche una variazione della distanza tra i due pivot, definita mediante il rapporto:

$$\rho_j = \frac{Z_k'}{Z_k}, \quad \text{si ha:} \quad Z_k' = Z_k \rho_j e^{i\theta_j} = Z_k \rho_j e^{i\phi_j}$$

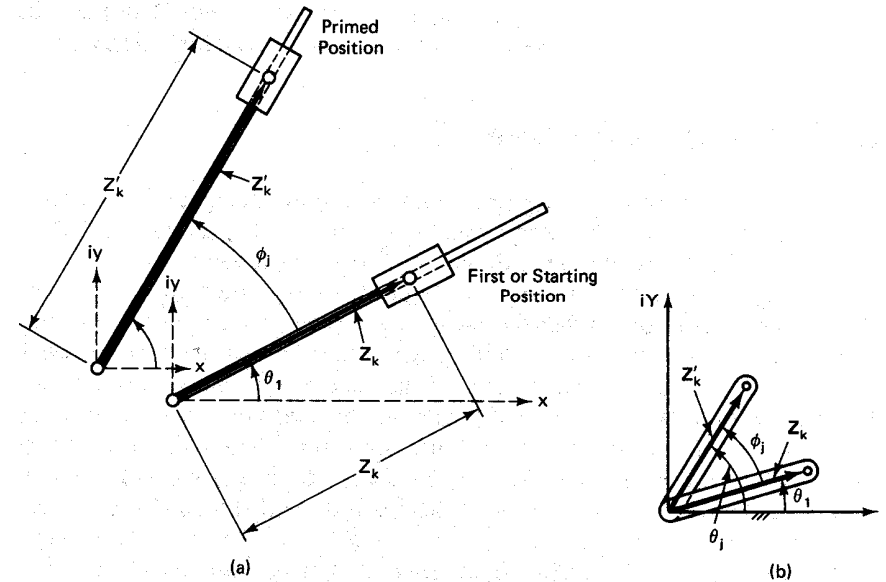


Figura 3 – Rappresentazione con vettori complessi della coppia asta-corsoio: a) pura traslazione; b) pura rotazione.

La diade

La grande maggioranza di sistemi articolati piani può essere pensata come combinazione di coppie di vettori chiamate DIADI.

Per esempio il quadrilatero articolato di Figura 4 può essere ritenuto combinazione di due diadi: la parte sinistra rappresentata mediante la coppia di vettori **W** e **Z** e la parte destra dai vettori **W*** e **Z***.

I vettori che rappresentano la biella AB ed il telaio A₀B₀ possono essere facilmente determinati mediante le seguenti relazioni vettoriali:

$$AB = Z - Z^*$$

$$A_0B_0 = W + AB - W^*$$

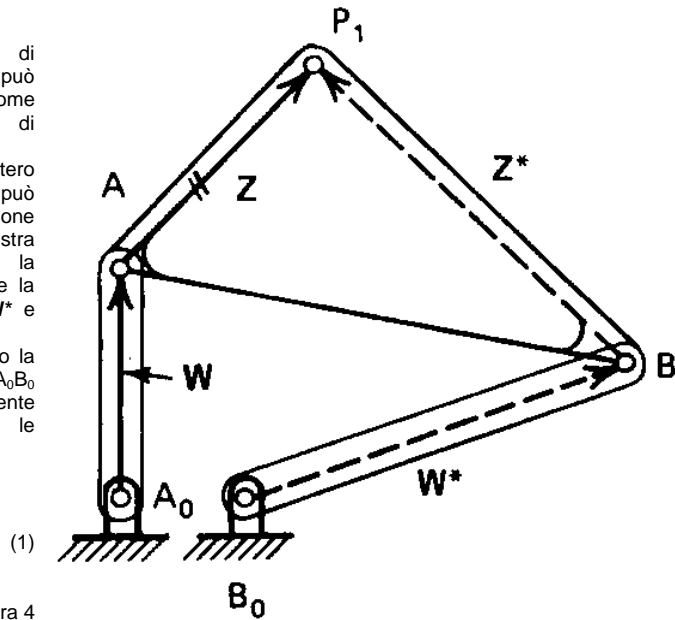


Figura 4

Si consideri ora solo una delle due diadi che formano il quadrilatero di Figura 4, ad esempio quella di sinistra, e con questa si voglia collocare un punto P del piano in determinate posizioni.

Detta P_j la posizione j-esima del punto P, se si misurano le rotazioni dei vettori a partire dalla posizione iniziale P₁ (positive quelle antiorarie), con riferimento alla Figura 5, si ha:

- β_j rotazione di **W** nel passaggio di P dalla posizione iniziale P₁ alla posizione P_j
- α_j rotazione di **Z** nel passaggio di P dalla posizione iniziale P₁ alla posizione P_j

Definendo inoltre le posizioni P₁ e P_j tramite i vettori complessi **R**₁ e **R**_j (rispetto ad un arbitrario sistema di riferimento complesso x-iy con origine in O), deve averci (per la chiusura del poligono A₀ A P₁ O P_j A₀):

$$W e^{i\beta_j} + Z e^{i\alpha_j} - R_j + R_1 - Z - W = 0 \quad (2)$$

La (2) si può anche scrivere nel modo seguente:

$$W (e^{i\beta_j} - 1) + Z (e^{i\alpha_j} - 1) = \delta_j \quad (3) \quad \text{con:} \quad \delta_j = R_j - R_1 \quad (4)$$

che esprime la chiusura dell'anello A₀ A P₁ P_j A₀.

In altre parole l'equazione (3) è la somma vettoriale effettuata seguendo l'anello che contiene la prima e la j-esima posizione della.

La (3) è detta *standard form* se sono noti gli angoli α_j o β_j e se il vettore δ_j è noto, ovvero le posizioni P₁ e P_j sono note (sono noti i vettori R₁ ed R_j).

Questa è la situazione comune quando si devono raggiungere gli usuali obiettivi della sintesi cinematica: generazione di movimenti, generazione di traiettorie, generazione di funzioni.

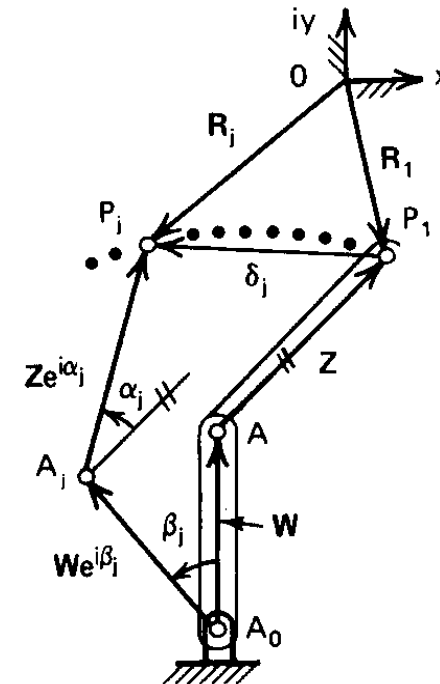


Figura 5

La diade: Numero di posizioni prescritte e numero di scelte arbitrarie

Dal momento che il numero di parametri (le due componenti di ogni vettore) che descrivono il meccanismo nella sua posizione iniziale è finito, il numero di posizioni (o movimenti) che può essere imposto in un problema di sintesi sarà finito.

Si pensi, per fissare le idee, alla generazione di **movimenti** con una diade.

Nella Figura 5, saranno assegnati i vettori δ_j e le rotazioni del secondo membro mobile della diade, cioè gli angoli α_j.

Se il numero di posizioni prescritte è pari a **due** (j=2), l'equazione vettoriale (3) diventa:

$$W (e^{i\beta_2} - 1) + Z (e^{i\alpha_2} - 1) = \delta_2$$

dove le incognite sono 5 (le due componenti W_x e W_y del vettore **W**, le due componenti Z_x e Z_y del vettore **Z** e l'angolo β₂). Si hanno quindi due equazioni scalari che contengono cinque incognite scalari. Se tre delle cinque incognite vengono fissate arbitrariamente, le equazioni possono essere risolte nelle restanti due incognite. Poiché in generale c'è un infinito numero di scelte per ognuna delle tre variabile "libere", il numero di possibili soluzioni per un problema di sintesi di questo tipo è ∞³ (infinito al cubo).

Se il numero di posizioni prescritte aumenta di uno, il numero di equazioni scalari aumenta di due (le equazioni vettoriali aumentano di uno), ma si ha una sola incognita in più. Perciò si avrà un numero di soluzioni pari a ∞².

La situazione è riassunta in Tabella 1. Ogni volta che si aggiunge una posizione, si aggiungono due equazioni scalari ed il numero di incognite scalari aumenta di uno. Se il numero di posizioni prescritte è cinque, non si hanno variabili che è possibile scegliere in modo arbitrario. Perciò cinque è il massimo

numero di posizioni possibile per la soluzione di un problema di generazione di movimento mediante diade.

Tabella 1

Numero di posizioni (n) j=2, 3, ..., n	Numero di equazioni scalari (e)	Numero di incognite scalari (i)	Numero di soluzioni (∞^{i-e})
2	2	5 ($\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \beta_2$)	∞^3
3	4	6 (precedenti + β_3)	∞^2
4	6	7 (precedenti + β_4)	∞^1
5	8	8 (precedenti + β_5)	Finito

Analizziamo nel dettaglio i vari casi.

Generazione di movimento – due posizioni (j=2).

Sono prescritti i valori di δ_2 e α_2 .
Si ha un'unica equazione vettoriale:

$$\mathbf{W} (e^{i\beta_2} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_2} - 1) = \delta_2 \quad (5)$$

Se, ad esempio, si scelgono ad arbitrio il vettore \mathbf{Z} e l'angolo β_2 , la soluzione per \mathbf{W} è la seguente:

$$\mathbf{W} = \frac{\delta_2 - \mathbf{Z} (e^{i\alpha_2} - 1)}{(e^{i\beta_2} - 1)} \quad (6)$$

La (6) rappresenta un sistema di due equazioni scalari che è lineare nelle due incognite W_x e W_y .

Generazione di movimento – tre posizioni (j=2, 3).

Sono prescritti i valori di δ_2 , δ_3 e α_2, α_3 .
Il sistema di equazioni è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} (e^{i\beta_2} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_2} - 1) &= \delta_2 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_3} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_3} - 1) &= \delta_3 \end{aligned} \quad (7)$$

Il sistema (7) corrisponde a quattro equazioni scalari. Se vengono scelti ad arbitrio i valori di β_2 e β_3 , il sistema (7) è lineare nelle incognite \mathbf{W} e \mathbf{Z} . Perciò, scelti ad arbitrio β_2 e β_3 , anche questo problema è lineare. La soluzione può essere trovata mediante la regola di Cramer:

$$\mathbf{W} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad (8)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad (9)$$

Generazione di movimento – quattro posizioni (j=2, 3, 4).

Le equazioni vettoriali sono tre:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} (e^{i\beta_2} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_2} - 1) &= \delta_2 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_3} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_3} - 1) &= \delta_3 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_4} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_4} - 1) &= \delta_4 \end{aligned} \quad (10)$$

E' concessa una sola scelta arbitraria; in particolare potrà essere scelto uno tra i sette parametri scalari: coordinate di \mathbf{W} e \mathbf{Z} , angoli β_2, β_3 , e β_4 .

Questa volta, anche se scegliamo arbitrariamente uno degli angoli β_j , il sistema (10) contiene espressioni trascendenti negli altri due angoli β .

Si può quindi concludere che tre è il massimo numero di posizioni che si possa prescrivere per avere ancora un problema di tipo lineare.

Generazione di movimento – cinque posizioni (j=2, 3, 4, 5).

Il sistema di equazioni vettoriali (11) risulta non lineare nelle incognite β_j e non sono ammesse scelte arbitrarie.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} (e^{i\beta_2} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_2} - 1) &= \delta_2 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_3} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_3} - 1) &= \delta_3 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_4} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_4} - 1) &= \delta_4 \\ \mathbf{W} (e^{i\beta_5} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\alpha_5} - 1) &= \delta_5 \end{aligned} \quad (11)$$

Sintesi di un quadrilatero articolato per la generazione di movimenti (3 posizioni)

Come già accennato, il quadrilatero articolato può essere pensato come combinazione di due diadi. Si veda a questo proposito la Figura 6. Gli angoli di cui ruotano i membri della diade di sinistra sono al solito indicati con β_j e α_j . Per distinguerli da quelli della diade di destra, si introduce una nuova notazione (vedi Figura 7). Con l'ausilio della notazione di Figura 7, l'equazione (3) diventa:

Per il lato sinistro:

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z} (e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j \quad (12)$$

e, analogamente, per il lato destro:

$$\mathbf{W}^* (e^{i\psi_j} - 1) + \mathbf{Z}^* (e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j \quad (13)$$

dove, se le posizioni assegnate sono tre, j=2, 3.

Per la generazione di movimenti, i vettori δ_2, δ_3 e gli angoli γ_2, γ_3 sono assegnati.

Conviene scegliere come parametri arbitrari, gli angoli ϕ_j per il lato sinistro e gli angoli ψ_j per il lato destro, in modo che il problema sia lineare nelle incognite \mathbf{W}, \mathbf{Z} e $\mathbf{W}^*, \mathbf{Z}^*$.

La soluzione può essere facilmente trovata, ad esempio mediante le (8) e (9).

Per individuare biella e telaio del quadrilatero articolato, si utilizzano le seguenti:

$$AB=Z \cdot Z^* \quad A_0B_0=W+AB \cdot W^*$$

N.B. Una volta trovata la soluzione, occorre verificare che il quadrilatero sia concretamente in grado di risolvere il problema. In particolare occorre verificare che, per raggiungere con continuità le posizioni imposte, non si debba smontare e rimontare il quadrilatero in un'altra configurazione.

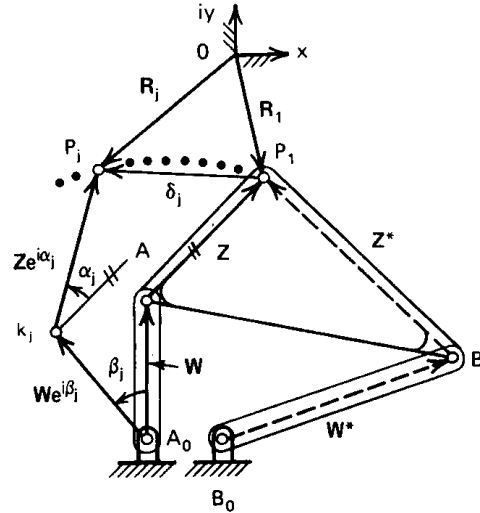


Figura 6

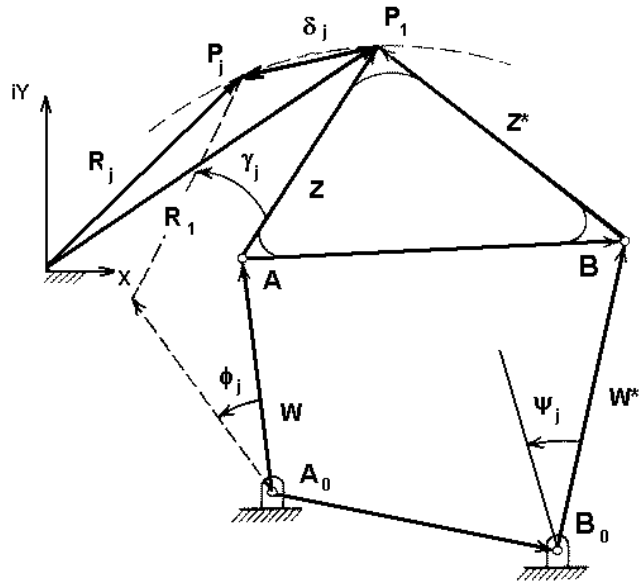


Figura 7

Esempio 1

Siano assegnate le tre posizioni assunte dal segmento di Figura 8.

Se si collocano gli assi delle coppie rotoidali di biella in corrispondenza degli estremi del segmento AB, si perviene immediatamente alla soluzione mediante metodo grafico. E' infatti sufficiente intersecare gli assi dei segmenti A1A2 e A2A3 per trovare A0, mentre B0 si individua intersecando gli assi dei segmenti B1B2 e B2B3.

Il quadrilatero che si ottiene è rappresentato in Figura 9 nelle tre posizioni corrispondenti a quelle assegnate per il segmento.

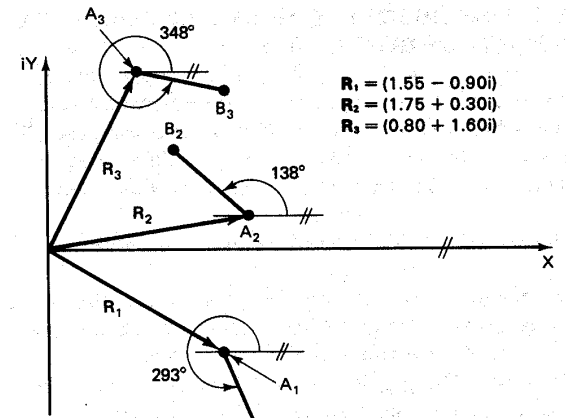


Figura 8

Si può poi impiegare l'equazione (3) per verificare la soluzione ottenuta con il metodo grafico. Fissato un sistema di riferimento complesso (x, iy) con l'origine in A0, note le coordinate dei punti A1, A2 e A3, si ricavano i vettori complessi:

$$R_1=1.55-0.9i$$

$$R_2=1.75+0.3i$$

$$R_3=0.8+1.6i$$

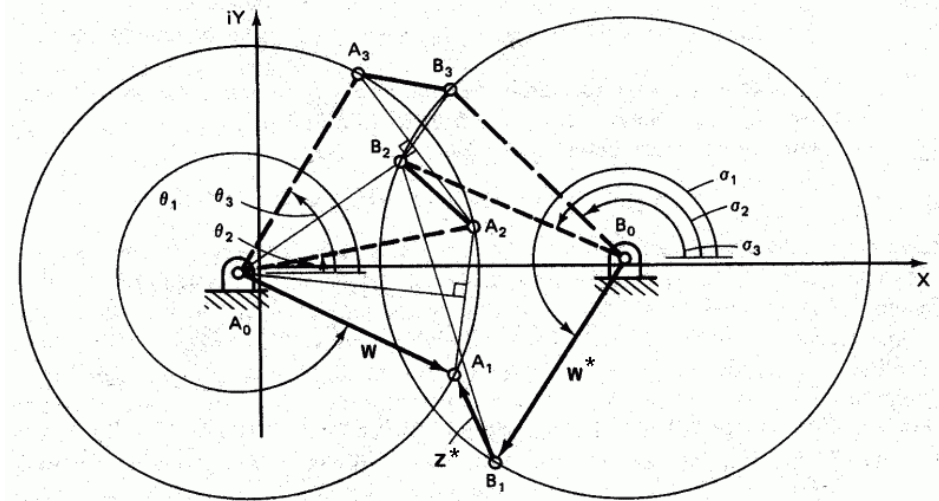


Figura 9

e i corrispondenti vettori:

$$\delta_2 = R_2 - R_1$$

$$\delta_3 = R_3 - R_1$$

Inoltre, noti gli angoli di rotazione della biella rispetto all'asse x, si ricavano le rotazioni di biella nel passaggio dalla posizione di partenza alla seconda e terza posizione:

$$\gamma_2 = 138^\circ - 293^\circ = -155^\circ = 205^\circ$$

$$\gamma_3 = 348^\circ - 293^\circ = 55^\circ$$

Dalla Figura 9 si misurano gli angoli θ_k e σ_k ($k=1,2,3$).
Si possono così valutare le differenze:

$$\phi_2 = \theta_2 - \theta_1 = 9^\circ - 330^\circ = -321^\circ = 39^\circ$$

$$\phi_3 = \theta_3 - \theta_1 = 64^\circ - 330^\circ = -266^\circ = 94^\circ$$

$$\psi_2 = \sigma_2 - \sigma_1 = 156^\circ - 235^\circ = -79^\circ = 281^\circ$$

$$\psi_3 = \sigma_3 - \sigma_1 = 135^\circ - 235^\circ = -100^\circ = 260^\circ$$

Si scrive l'equazione (3) per il lato sinistro del quadrilatero ($j=2, 3$):

$$W (e^{i\phi_2} - 1) + Z (e^{i\gamma_2} - 1) = \delta_2$$

$$W (e^{i\phi_3} - 1) + Z (e^{i\gamma_3} - 1) = \delta_3$$

e per il lato destro:

$$W (e^{i\psi_2} - 1) + Z (e^{i\gamma_2} - 1) = \delta_2$$

$$W (e^{i\psi_3} - 1) + Z (e^{i\gamma_3} - 1) = \delta_3$$

da cui, con i valori introdotti, si ricavano, per il lato sinistro:

$$W = W e^{i\theta_1} = 1.78 e^{i330.04^\circ}$$

$$Z = 0.018 e^{i284.07^\circ}$$

E per il lato destro:

$$W^* = 2.01 e^{i235.32^\circ}$$

$$Z^* = 0.79 e^{i112.97^\circ}$$

I risultati ottenuti confermano il risultato ottenuto graficamente.

In particolare, avendo collocato gli assi delle coppie rotoidali di biella in corrispondenza degli estremi del segmento da collocare nelle tre posizioni del piano, risulta che il modulo del vettore Z è praticamente nullo.

Come detto in precedenza, una volta trovata la soluzione, occorre verificare che il quadrilatero sia in grado di raggiungere con continuità le posizioni imposte senza dover cambiare configurazione.

Nel caso in esame, se il membro movente è l'asta di sinistra, la configurazione relativa alla prima posizione del segmento AB è diversa dalla configurazione relativa alle altre due posizioni. Pertanto, per passare dalla prima alla seconda (e poi alla terza) occorre prima ruotare l'asta A_0A_1 in senso orario fino a far giungere il quadrilatero in posizione singolare, fargli cambiare "in qualche modo la configurazione", e poi ruotare il movente in senso orario fino a far occupare al segmento AB le due posizioni A_2B_2 e A_3B_3 .

Esempio 2

Progettare un q.a. per trasferire scatole dal nastro convogliatore 1 al nastro 2 (Figura 10).

I dati sono i seguenti:

$$\delta_2 = -6 + 11i$$

$$\gamma_2 = 22^\circ$$

$$\delta_3 = -17 + 13i$$

$$\gamma_3 = 68^\circ$$

Scelti ad arbitrio:

per il lato sinistro:

$$\phi_2 = 90^\circ$$

$$\phi_3 = 198^\circ$$

per il lato destro:

$$\psi_2 = 40^\circ$$

$$\psi_3 = 73^\circ$$

Risulta:

$$W = 5.77 e^{i4.78^\circ}$$

$$Z = 15.02 e^{i(-13-36)^\circ}$$

$$W^* = 18.38 e^{i(-2.1)^\circ}$$

$$Z^* = 6.12 e^{i103.42^\circ}$$

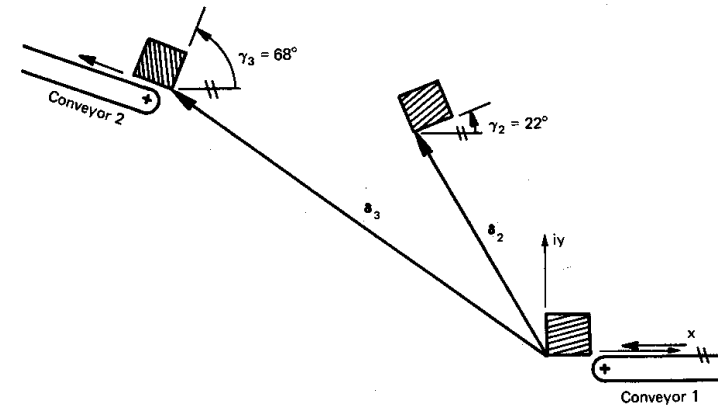


Figura 10

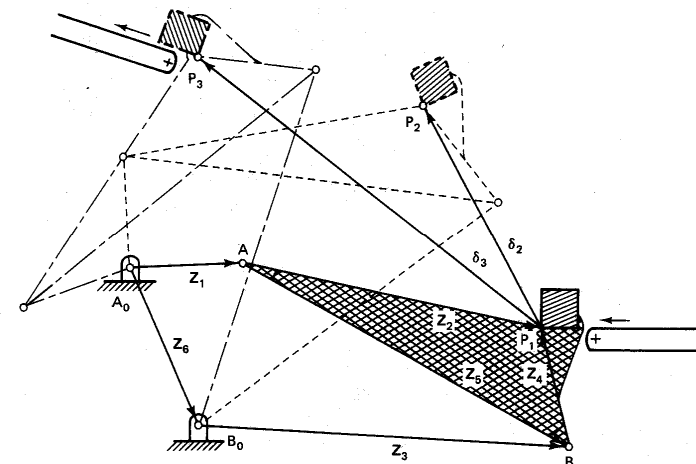


Figura 11

Sintesi di un quadrilatero articolato per la generazione di traiettorie in tempi stabiliti (3 punti di precisione)

Si faccia ancora riferimento alla Figura 7 (riportata anche qui per comodità).

Per il lato sinistro si può scrivere:

$$W(e^{i\phi_j} - 1) + Z(e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j$$

e, analogamente, per il lato destro:

$$W^*(e^{i\psi_j} - 1) + Z^*(e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j$$

dove, se le posizioni assegnate sono tre, $j=2, 3$.

I vettori δ_2, δ_3 sono assegnati, mentre questa volta, al contrario di quanto avviene per la generazione di movimenti, sono assegnati gli angoli ϕ_2, ϕ_3 .

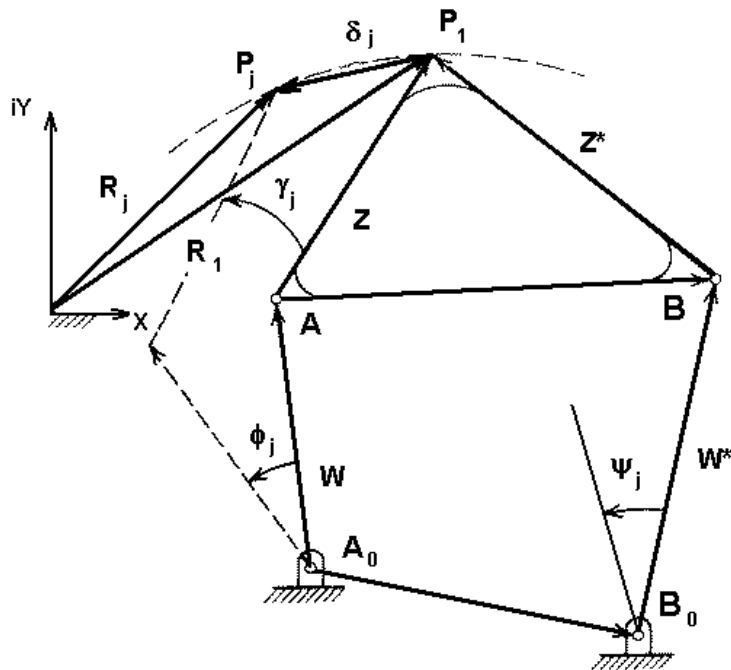
Per il lato sinistro, scelti ad arbitrio γ_2 e γ_3 (in modo che il problema sia lineare) si determinano le incognite W, Z .

Naturalmente, per il lato destro gli angoli γ_2 e γ_3 sono ancora gli stessi scelti per il lato sinistro. Una volta scelti ad arbitrio gli angoli ψ_2, ψ_3 , sarà possibile determinare W^* e Z^* .

Si ha infine:

$$AB = Z - Z^*$$

$$A_0B_0 = W + AB - W^*$$



Esempio 3

Progettare un q.a. in cui un punto di biella descriva una traiettoria ellittica passante per tre punti di precisione in tempi assegnati (Figura 12).

I dati sono i seguenti:

$$R_1 = 2 - 0.75i \quad \phi_2 = 126^\circ$$

$$R_2 = 0.6 - 1.51i \quad \phi_3 = 252^\circ$$

$$R_3 = 1 - 3.05i$$

da cui risulta:

$$\delta_2 = -1.4 - 0.76i$$

$$\delta_3 = -1.0 - 2.3i$$

Scelti ad arbitrio:

per il lato sinistro:	$\gamma_2 = -6^\circ$	
	$\gamma_3 = 37^\circ$	
per il lato destro:	$\gamma_2 = -6^\circ$	$\psi_2 = 33^\circ$
	$\gamma_3 = 37^\circ$	$\psi_3 = 37^\circ$

Risulta:

$$W = 1.00 e^{i53.78^\circ} \quad W^* = 2.99 e^{i108.38^\circ}$$

$$Z = 1.90 e^{i105.86^\circ} \quad Z^* = 2.00 e^{i185.40^\circ}$$

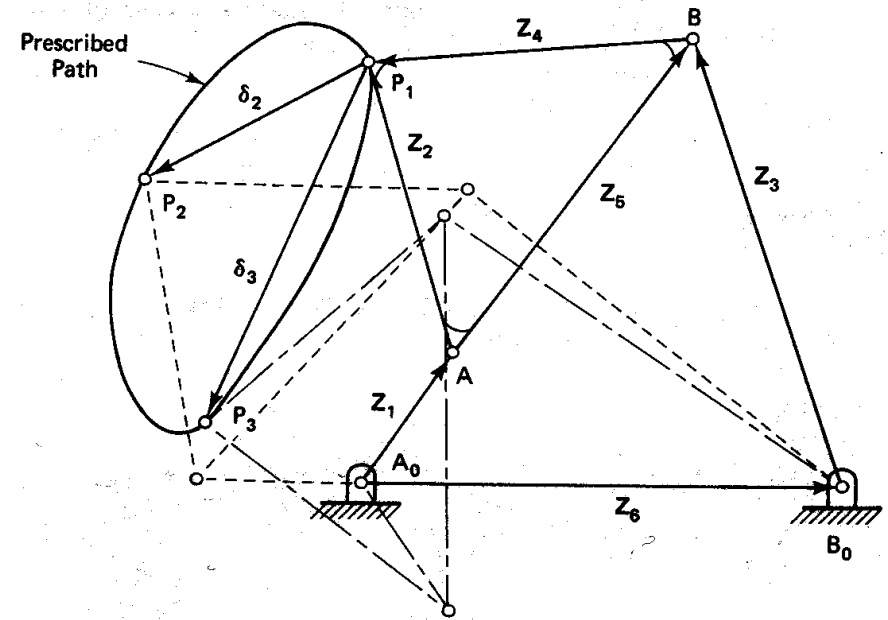


Figura 12

Sintesi di un quadrilatero articolato per la generazione di funzioni (tre posizioni)

Si faccia ora riferimento alla Figura 13. Per la generazione di funzioni, occorre correlare le rotazioni prescritte del membro input con quelle dell'output. In altre parole è assegnato il legame tra gli angoli ϕ_j e ψ_j . Si noti che in questo caso la posizione di biella non ha interesse.

Deve valere la chiusura dell'anello $B_0B_1A_1A_0A_jB_jB_0$, cioè deve aversi:

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_j} - 1) - \mathbf{W}^* (e^{i\psi_j} - 1) = 0 \tag{14}$$

La (14) è l'equazione per i problemi di generazione di funzioni.

La (14) non è nella forma standard (vedi equazione (3)) perciò si devono rivedere i discorsi fatti a proposito di posizioni prescritte e numero di scelte arbitrarie. Se n è il numero di posizioni assegnate, si riescono a scrivere $(n-1)$ equazioni vettoriali del tipo (14), il che equivale ad avere $2(n-1)$ equazioni scalari. Il numero di incognite scalari è $6+n-1$ (i vettori \mathbf{W} , \mathbf{AB} , \mathbf{W}^* e gli angoli γ_j ($j=2,3,\dots,n$)). Il numero di scelte arbitrarie sarà pertanto pari alla differenza tra il numero di incognite ed il numero di equazioni, cioè: $6+n-1-2(n-1)=7-n$. Ne risulta che sette è il massimo numero di posizioni che è possibile assegnare per generare funzioni mediante un quadrilatero articolato. La tabella 2 riassume la situazione.

Tabella 2

Numero di posizioni (n) $j=2, 3, \dots, n$	Numero di equazioni scalari $e=2(n-1)$	Numero di incognite scalari $i=6+n-1$	Numero di soluzioni (∞^{i-e})
2	2	7 (\mathbf{W} , \mathbf{W}^* , \mathbf{Z} , γ_2)	∞^5
3	4	8 (precedenti + γ_3)	∞^4
4	6	9 (precedenti + γ_4)	∞^3
5	8	10 (precedenti + γ_5)	∞^2
6	10	11 (precedenti + γ_6)	∞^1
7	12	12 (precedenti + γ_7)	Finito

Si supponga ora di scegliere arbitrariamente due delle sette incognite scalari originarie, ad esempio \mathbf{W}^* (o, in alternativa, \mathbf{W}). Si ha:

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{W}^* (e^{i\psi_j} - 1) \tag{15}$$

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_j} - 1) = \delta_j \tag{16}$$

avendo indicato: $\mathbf{W}^* (e^{i\psi_j} - 1) = \delta_j$

La (16) è nella forma standard e la Tabella 2 diventa equivalente alla Tabella 1. La scelta arbitraria di \mathbf{W}^* fissa la scala del quadrilatero ed il suo orientamento, ma non incide sulla funzione che lega le rotazioni ϕ_j e ψ_j . Una volta ottenuto il quadrilatero, tutto il meccanismo può essere scalato ed orientato in qualunque maniera senza modificare tale relazione. Questo non succederà per i generatori di movimento o di traiettoria, nei quali la modifica della lunghezza di un'asta fa cambiare anche il movimento o la traiettoria generati. Poiché la funzione $\psi_j = f(\phi_j)$ non dipende dalla scelta di \mathbf{W}^* , non ha senso includere \mathbf{W}^* tra le incognite del problema. Una volta ricondotto il problema alla forma standard (16), è necessario sintetizzare una sola diade (\mathbf{W} , \mathbf{AB}) a differenza di quanto accade per la generazione di movimenti e di traiettorie dove occorre individuarne due (\mathbf{W} , \mathbf{Z} e \mathbf{W}^* , \mathbf{Z}^*).

Nel caso in cui $n=3$ (tre posizioni) si procede nel seguente modo:

$$j = 2, 3 \quad \mathbf{W} (e^{i\phi_2} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_2} - 1) = \mathbf{W}^* (e^{i\psi_2} - 1)$$

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_3} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_3} - 1) = \mathbf{W}^* (e^{i\psi_3} - 1)$$

I dati assegnati sono: $\phi_2, \phi_3, \psi_2, \psi_3$

Scelto ad arbitrio \mathbf{W}^* risultano noti δ_2 e δ_3 . A questo punto le equazioni si presentano nella forma standard:

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_2} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_2} - 1) = \delta_2$$

$$\mathbf{W} (e^{i\phi_3} - 1) + \mathbf{AB} (e^{i\gamma_3} - 1) = \delta_3$$

Scelti ad arbitrio gli angoli γ_2, γ_3 il problema è lineare nelle incognite \mathbf{W} e \mathbf{AB} .

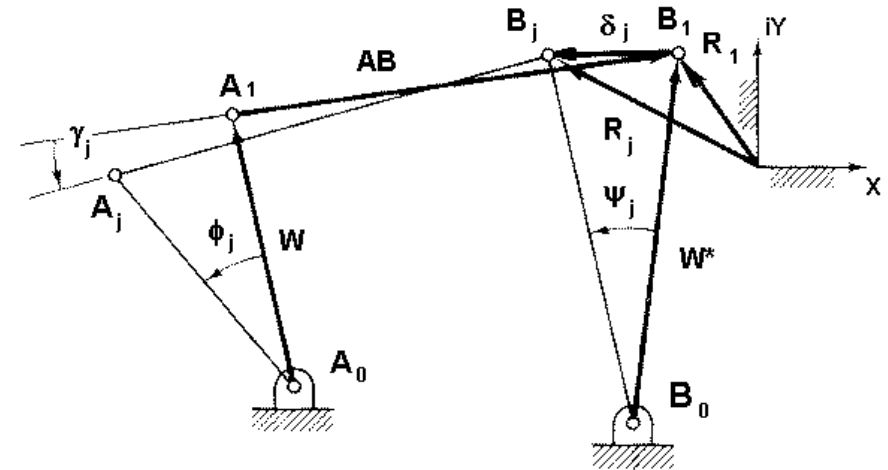


Figura 13

Esempio 4

Si debba progettare un meccanismo per movimentare schienale e poggipiedi della poltrona di Figura 14.

Dati

Primo quadrilatero

Scelte arbitrarie: $\phi_2 = 50^\circ$ $\psi_2 = 22.5^\circ$ $\gamma_2 = 7^\circ$ $W^* = 1 e^{i270^\circ}$ ($W^* = 0 - i$)
 $\phi_3 = 75^\circ$ $\psi_3 = 45^\circ$ $\gamma_3 = 12^\circ$

Secondo quadrilatero

Scelte arbitrarie: $\phi_2 = 22.5^\circ$ $\psi_2 = 40^\circ$ $\gamma_2 = 8^\circ$ $W^* = 1 e^{i90^\circ}$ ($W^* = 0 + i$)
 $\phi_3 = 45^\circ$ $\psi_3 = 70^\circ$ $\gamma_3 = 13^\circ$

Risultati:

Primo quadrilatero: $W = 0.45 e^{i169.47^\circ}$ $AB = 4.33 e^{i323.48^\circ}$
 Secondo quadrilatero: $W = 0.68 e^{i36.90^\circ}$ $AB = 2.37 e^{i177.44^\circ}$

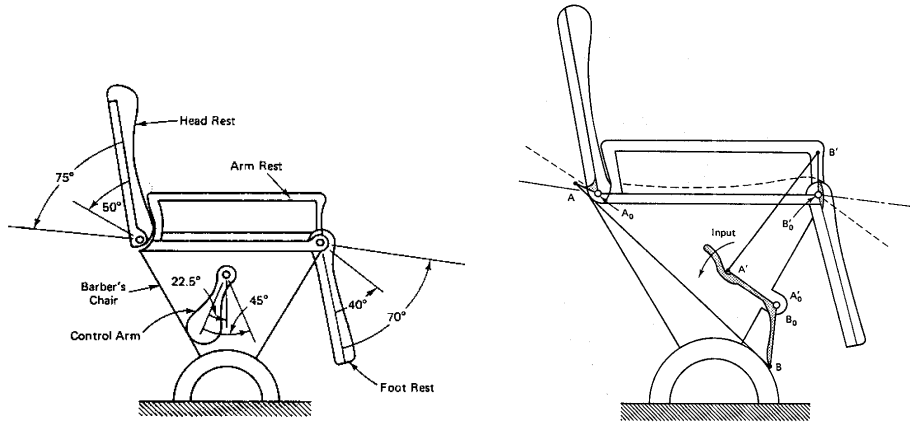


Figura 14

Sintesi di un quadrilatero articolato per la generazione di funzioni (tre posizioni)

Tecnica del loop chiuso

Si consideri il quadrilatero articolato di Figura 15 e si scriva l'equazione di chiusura; si ottiene:

$$Z_2 + Z_3 - Z_4 + Z_1 = 0 \quad (17)$$

Per la generazione di funzioni, solo le relazioni tra gli angoli hanno interesse, perciò è possibile scalare il meccanismo ed orientarlo in modo qualunque senza modificare tali relazioni.

Si può allora assumere $Z_1 = -1$, cioè il telaio di lunghezza unitaria, diretto ed orientato come l'asse reale del sistema di riferimento. La (17) si modifica e diventa:

$$Z_2 + Z_3 - Z_4 - 1 = 0 \quad (18)$$

Nella j-esima posizione assunta dal quadrilatero si ha:

$$Z_2^j + Z_3^j - Z_4^j - 1 = 0 \quad (19)$$

che è possibile scrivere nel modo seguente:

$$Z_2 e^{i\phi_j} + Z_3 e^{i\gamma_j} - Z_4 e^{i\psi_j} - 1 = 0 \quad (20)$$

La (20) è una equazione non omogenea, lineare nelle incognite Z_2, Z_3, Z_4 a coefficienti complessi.

Se tre sono le posizioni assegnate, si ha:

$$\begin{aligned} Z_2 + Z_3 - Z_4 &= 1 \\ Z_2 e^{i\phi_2} + Z_3 e^{i\gamma_2} - Z_4 e^{i\psi_2} &= 1 \\ Z_2 e^{i\phi_3} + Z_3 e^{i\gamma_3} - Z_4 e^{i\psi_3} &= 1 \end{aligned}$$

I dati sono ϕ_2, ϕ_3, ψ_2 e ψ_3 .

Le incognite sono i vettori Z_2, Z_3, Z_4 e gli angoli γ_2, γ_3 . Si hanno perciò 6 equazioni scalari e 8 incognite scalari: le soluzioni sono ∞^2 (come ci si attendeva).

Scelti ad arbitrio gli angoli γ_2, γ_3 , restano 3 equazioni vettoriali nelle tre incognite vettoriali Z_2, Z_3, Z_4 .

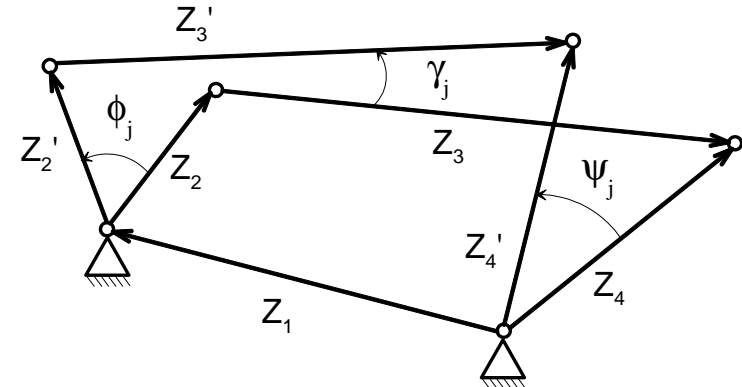


Figura 15

Sintesi di un quadrilatero articolato per la generazione di funzioni Velocità e accelerazioni (Order synthesis)

In molte situazioni l'obiettivo della sintesi cinematica riguarda non solo le posizioni ma anche velocità ed accelerazioni. Si parla di *order synthesis*. Tale obiettivo può essere raggiunto impiegando il metodo del loop chiuso visto al paragrafo precedente. E' sufficiente derivare una e due volte rispetto al tempo l'equazione di chiusura (17). Si ottiene (vedi Figura 16):

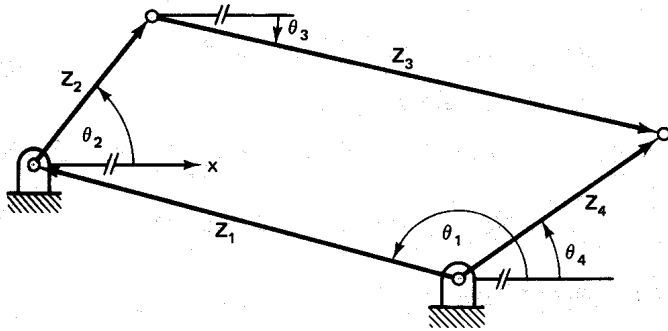


Figura 16

Posizione:

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 = -\mathbf{Z}_1 \quad (21)$$

$$Z_2 e^{i\theta_2} + Z_3 e^{i\theta_3} - Z_4 e^{i\theta_4} = -Z_1 e^{i\theta_1}$$

Velocità:

$$Z_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + Z_3 \omega_3 i e^{i\theta_3} - Z_4 \omega_4 i e^{i\theta_4} = 0$$

$$\mathbf{Z}_2 \omega_2 + \mathbf{Z}_3 \omega_3 - \mathbf{Z}_4 \omega_4 = 0 \quad (22)$$

Accelerazione:

$$-Z_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + Z_2 \dot{\omega}_2 i e^{i\theta_2} - Z_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} + Z_3 \dot{\omega}_3 i e^{i\theta_3} + Z_4 \omega_4^2 e^{i\theta_4} - Z_4 \dot{\omega}_4 i e^{i\theta_4} = 0$$

$$Z_2 (\dot{\omega}_2 i - \omega_2^2) e^{i\theta_2} + Z_3 (\dot{\omega}_3 i - \omega_3^2) e^{i\theta_3} - Z_4 (\dot{\omega}_4 i - \omega_4^2) e^{i\theta_4} = 0$$

$$\mathbf{Z}_2 (\dot{\omega}_2 i - \omega_2^2) + \mathbf{Z}_3 (\dot{\omega}_3 i - \omega_3^2) - \mathbf{Z}_4 (\dot{\omega}_4 i - \omega_4^2) = 0 \quad (23)$$

Essendo naturalmente:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Se, al solito, si considerano tre posizioni (che è ancora il massimo numero per ottenere un problema lineare nelle tre incognite Z_2, Z_3, Z_4), una volta assunto $Z_1=-1$.

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 = 1$$

$$\mathbf{Z}_2 \omega_2 + \mathbf{Z}_3 \omega_3 - \mathbf{Z}_4 \omega_4 = 0$$

$$\mathbf{Z}_2 (\dot{\omega}_2 i - \omega_2^2) + \mathbf{Z}_3 (\dot{\omega}_3 i - \omega_3^2) - \mathbf{Z}_4 (\dot{\omega}_4 i - \omega_4^2) = 0$$

Note le velocità angolari $\omega_2, \omega_3, \omega_4$, e le accelerazioni angolari $\dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4$, si ha un sistema di tre equazioni vettoriali nelle tre incognite vettoriali Z_2, Z_3, Z_4 .

% ESEMPIO 1

```
% Sintesi di un quadrilatero per
% generazione di un movimento
% Tre posizioni di biella
% Verifica del procedimento grafico.
% MATLAB
% A. Rivola - Oct. 2000
```

```
d2r=pi/180;
```

```
delta2=0.2+1.2*i;
delta3=-0.75+2.5*i;
delta=[delta2;delta3];
```

```
alpha(2)=205*d2r;
alpha(3)=55*d2r;
beta(2)=39*d2r;
beta(3)=94*d2r;
a=exp(i*beta(2))-1;
b=exp(i*alpha(2))-1;
d=exp(i*beta(3))-1;
e=exp(i*alpha(3))-1;
M1=[[a,b];[d,e]];
res1=M1\delta;
```

```
betas(2)=281*d2r;
betas(3)=260*d2r;
a=exp(i*betas(2))-1;
d=exp(i*betas(3))-1;
M2=[[a,b];[d,e]];
res2=M2\delta;
```

```
figure('pos',[200 200 500 500]),
hold on
```

```
for k=1:3,
W=res1(1)*exp(i*beta(k));
Z=res1(2)*exp(i*alpha(k));
Ws=res2(1)*exp(i*betas(k));
Zs=res2(2)*exp(i*alpha(k));
AB=Z-Zs;
abs(AB);
angle(AB)/d2r;
TEL=W+AB-Ws;
abs(TEL);
angle(TEL)/d2r;
```

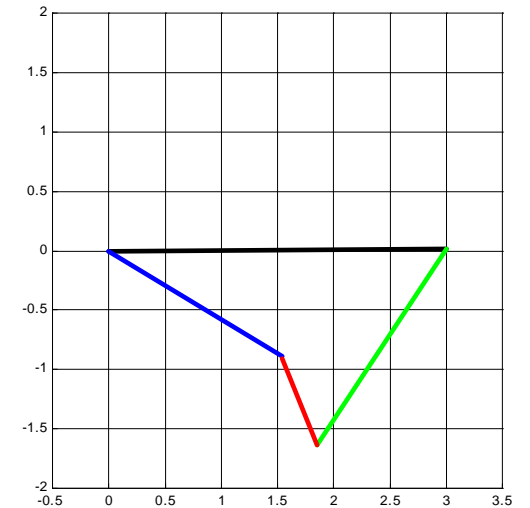
```
A0x=0;
A0y=0;
B0x=(real(TEL));
B0y=(imag(TEL));
Ax=(real(W));
Ay=(imag(W));
Bx=(real(TEL+Ws));
By=(imag(TEL+Ws));
Px=(real(W+Z));
Py=(imag(W+Z));
```

```
pause
plot([A0x, B0x],[A0y, B0y],'k','linewidth',[3])
plot([A0x,Ax],[A0y,Ay],'b','linewidth',[3])
plot([B0x,Bx],[B0y,By],'g','linewidth',[3])
plot([Px,Bx],[Py,By],'r','linewidth',[3]);
```

```
grid on
axis([-0.5 3.5 -2 2])
end
```

hold off

return



% ESEMPIO 2

```
% Sintesi di un quadrilatero per
% generazione di un movimento
% Tre posizioni di biella
%
% MATLAB
% A. Rivola – Oct. 2000
```

```
d2r=pi/180;
```

```
delta2=-6+11*i;
delta3=-17+13*i;
delta=[delta2;delta3];
```

```
phi(2)=90*d2r;
phi(3)=198*d2r;
gamma(2)=22*d2r;
gamma(3)=68*d2r;
a=exp(i*phi(2))-1;
b=exp(i*gamma(2))-1;
d=exp(i*phi(3))-1;
e=exp(i*gamma(3))-1;
M1=[[a,b];[d,e]];
res1=M1\delta;
```

```
psi(2)=40*d2r;
psi(3)=73*d2r;
a=exp(i*psi(2))-1;
d=exp(i*psi(3))-1;
M2=[[a,b];[d,e]];
res2=M2\delta;
```

```
figure('pos',[200 200 500 500]),
hold on
```

```
for k=1:3,
W=res1(1)*exp(i*phi(k));
Z=res1(2)*exp(i*gamma(k));
Ws=res2(1)*exp(i*psi(k));
Zs=res2(2)*exp(i*gamma(k));
AB=Z-Zs;
TEL=W+AB-Ws;
```

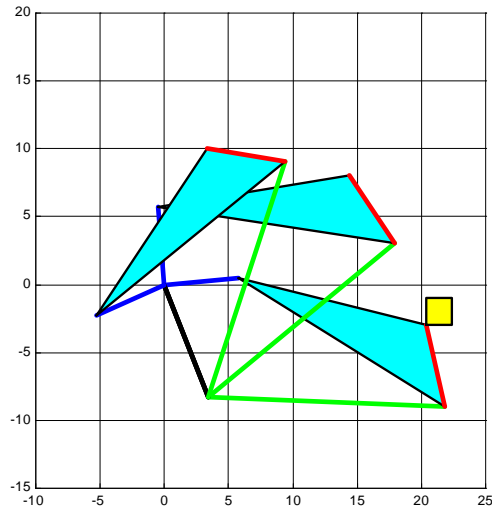
```
A0x=0;
A0y=0;
B0x=(real(TEL));
B0y=(imag(TEL));
Ax=(real(W));
Ay=(imag(W));
Bx=(real(TEL+Ws));
By=(imag(TEL+Ws));
Px=(real(W+Z));
Py=(imag(W+Z));
```

```
pause
plot([A0x, B0x],[A0y, B0y],'k','linewidth',[3])
plot([A0x,Ax],[A0y,Ay],'b','linewidth',[3])
plot([B0x,Bx],[B0y,By],'g','linewidth',[3])
patch([Ax,Bx,Px],[Ay,By,Py],'c','linewidth',[2]);
plot([Px,Bx],[Py,By],'r','linewidth',[3]);
```

```
grid on
axis([-10 25 -15 20])
end
```

```
hold off
```

```
return
```

**% ESEMPIO 3**

```
% Sintesi di un quadrilatero per
% generazione di traiettorie
% Tre punti di precisione
%
% MATLAB
% A. Rivola – Oct. 2000
```

```
d2r=pi/180;
```

```
delta2=-1.4-0.76*i;
delta3=-1-2.3*i;
delta=[delta2;delta3];
```

```
phi(2)=126*d2r;
phi(3)=252*d2r;
gamma(2)=-6*d2r;
gamma(3)=37*d2r;
a=exp(i*phi(2))-1;
b=exp(i*gamma(2))-1;
d=exp(i*phi(3))-1;
e=exp(i*gamma(3))-1;
M1=[[a,b];[d,e]];
res1=M1\delta;
```

```
psi(2)=33*d2r;
psi(3)=37*d2r;
a=exp(i*psi(2))-1;
d=exp(i*psi(3))-1;
M2=[[a,b];[d,e]];
res2=M2\delta;
```

```
figure('pos',[200 200 500 500]),
hold on
```

```
for k=1:3,
W=res1(1)*exp(i*phi(k));
Z=res1(2)*exp(i*gamma(k));
Ws=res2(1)*exp(i*psi(k));
Zs=res2(2)*exp(i*gamma(k));
AB=Z-Zs;
TEL=W+AB-Ws;
```

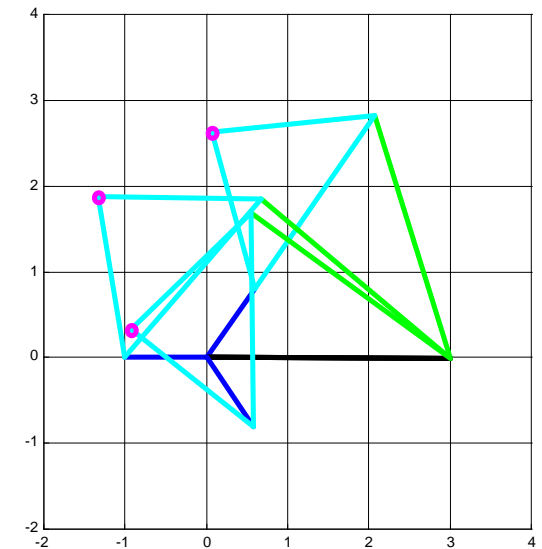
```
A0x=0;
A0y=0;
B0x=(real(TEL));
B0y=(imag(TEL));
Ax=(real(W));
Ay=(imag(W));
Bx=(real(TEL+Ws));
By=(imag(TEL+Ws));
Px=(real(W+Z));
Py=(imag(W+Z));
```

```
pause
plot([A0x, B0x],[A0y, B0y],'k','linewidth',[3])
plot([A0x,Ax],[A0y,Ay],'b','linewidth',[3])
plot([B0x,Bx],[B0y,By],'g','linewidth',[3])
plot([Ax,Px],[Ay,Py],'c','linewidth',[3])
plot([Px,Bx],[Py,By],'c','linewidth',[3])
plot([Ax,Bx],[Ay,By],'c','linewidth',[3]);
plot(Px,Py,'mo','linewidth',[3]);
```

```
grid on
axis([-2 4 -2 4])
end
```

```
hold off
```

```
return
```



% ESEMPIO 4

```
% Sintesi di un quadrilatero per
% generazione di funzioni
% Tre posizioni assegnate
% MATLAB
% A. Rivola – Oct. 2000
```

```
d2r=pi/180;
```

% Quadrilatero no. 1

```
phi(2)=50*d2r;
phi(3)=75*d2r;
psi(2)=22.5*d2r;
psi(3)=45*d2r;
```

```
% Scelgo ad arbitrio Ws
```

```
Ws=0.02-i*0.3;
Ws=0-i*1;
delta2=Ws*(exp(i*psi(2))-1);
delta3=Ws*(exp(i*psi(3))-1);
delta=[delta2;delta3];
```

```
% Scelgo ad arbitrio gamma
```

```
gamma(2)=7*d2r;
gamma(3)=12*d2r;
```

```
a=exp(i*phi(2))-1;
b=exp(i*gamma(2))-1;
d=exp(i*phi(3))-1;
e=exp(i*gamma(3))-1;
M1=[a,b];[d,e];
res1=M1\delta;
```

```
figure('pos',[200 200 500 500]),
hold on
for k=1:3,
W=res1(1)*exp(i*phi(k));
AB=res1(2)*exp(i*gamma(k));
Ws=(delta2/(exp(i*psi(2))-1))*(exp(i*psi(k)));
TEL=W+AB-Ws;
```

```
A0x=0;
A0y=0;
B0x=(real(TEL));
B0y=(imag(TEL));
Ax=(real(W));
Ay=(imag(W));
Bx=(real(TEL+Ws));
By=(imag(TEL+Ws));
```

```
plot([A0x, B0x],[A0y, B0y],'k','linewidth',[3])
plot([A0x,Ax],[A0y,Ay],'b','linewidth',[3])
plot([B0x,Bx],[B0y,By],'g','linewidth',[3])
plot([Ax,Bx],[Ay,By],'c','linewidth',[2]);
grid on
axis([-0.5 4 -3.5 1])
end
hold off
```

% Quadrilatero no. 2

```
phi(2)=40*d2r;
phi(3)=70*d2r;
psi(2)=22.5*d2r;
psi(3)=45*d2r;
```

```
% Scelgo ad arbitrio Ws
```

```
Ws=0+i*1;
delta2=Ws*(exp(i*psi(2))-1);
delta3=Ws*(exp(i*psi(3))-1);
delta=[delta2;delta3];
```

```
% Scelgo ad arbitrio gamma
```

```
gamma(2)=8*d2r;
gamma(3)=13*d2r;
```

```
a=exp(i*phi(2))-1;
b=exp(i*gamma(2))-1;
d=exp(i*phi(3))-1;
e=exp(i*gamma(3))-1;
M1=[a,b];[d,e];
res1=M1\delta;
```

```
figure('pos',[200 200 500 500]),
hold on
for k=1:3,
W=res1(1)*exp(i*phi(k));
AB=res1(2)*exp(i*gamma(k));
Ws=(delta2/(exp(i*psi(2))-1))*(exp(i*psi(k)));
TEL=W+AB-Ws;
```

```
A0x=0;
A0y=0;
B0x=(real(TEL));
B0y=(imag(TEL));
Ax=(real(W));
Ay=(imag(W));
Bx=(real(TEL+Ws));
By=(imag(TEL+Ws));
```

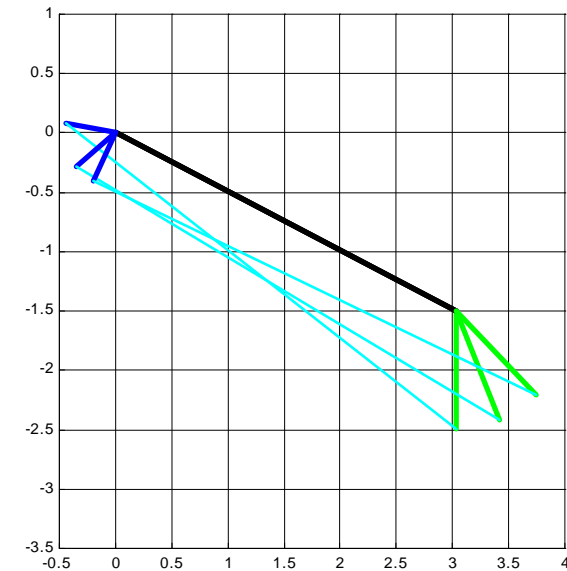
```
plot([A0x, B0x],[A0y, B0y],'k','linewidth',[3])
plot([A0x,Ax],[A0y,Ay],'b','linewidth',[3])
plot([B0x,Bx],[B0y,By],'g','linewidth',[3])
plot([Ax,Bx],[Ay,By],'c','linewidth',[2]);
grid on
axis([-3 1 -2 2])
end
```

```
hold off
```

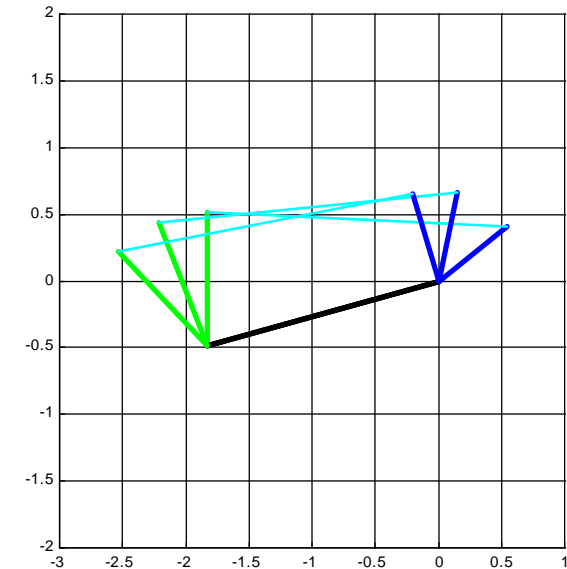
```
return
```

Risultati ESEMPIO 4

Quadrilatero No. 1



Quadrilatero No. 2



PROGRAMMA "ARTIC"

Eseguibile: ARTIC.EXE

help
 visualizzazione file di dati
 animazione
 grafica
 salvataggio risultati su file

Echo file: ARTIC.ECO

(ARTIC trascrive in questo
 file ogni istruzione letta e
 interpretata)

Input file: nome.DAT ("nome" è il nome attribuito al
 meccanismo)

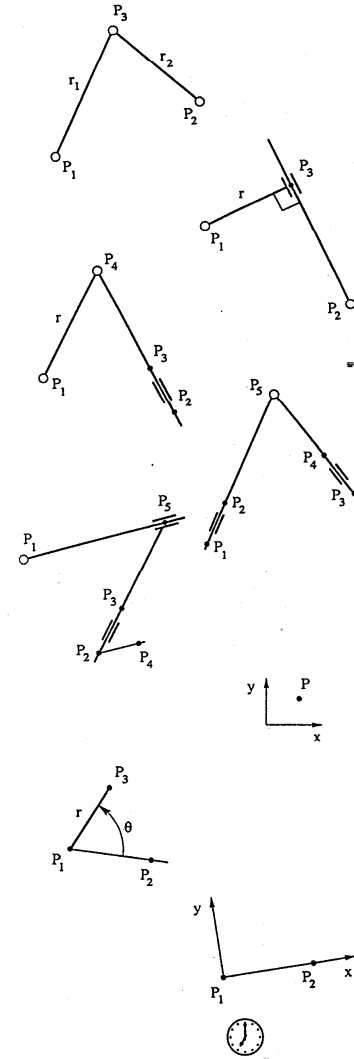
Output file: nome.OUT

File di dati
 esterno: legge.LAW ("legge" è il nome attribuito al
 file di dati esterno)

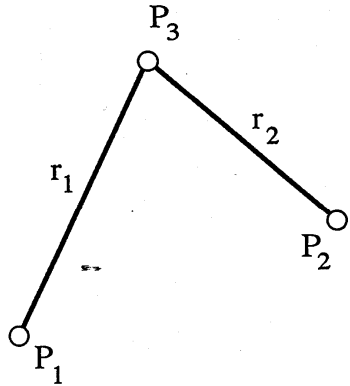
Tutti i file, tranne il primo, sono in formato ASCII.
 Si possono aprire ed editare con un qualunque "editor" di
 testo.

Istruzioni di ARTIC

string	integer	[floating point string]
rrr	$P_1 P_2 P_3$	conf $c_1 c_2$ [$r_{10} r'_{10} r_{20} r'_2$ nomefile]
rrp	$P_1 P_2 P_3$	conf $c_1 c_2$ [$r_0 r'$ nomefile]
rpr	$P_1 P_2 P_3 P_4$	conf $c_1 c_2$ [$r_0 r'$ nomefile]
ppr	$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$	$c_1 c_2$
rpp	$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$	$c_1 c_2$
knw	P	[x y nomefile]
drv	$P_1 P_2 P_3$	c [$\theta_0 \theta' r_0 r'$ nomefile]
fix	$P_1 P_2$	
tim	nstep	tmax



Gruppo rrr



Analisi di posizione

Noti P_1 , r_1 , P_2 ed r_2 , si determina P_3 . Le condizioni di compatibilità sono:

$$\begin{cases} (P_3 - P_1)^2 = r_1^2 \\ (P_3 - P_2)^2 = r_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

Con la posizione:

$$(P_3 - P_1) = \lambda (P_2 - P_1) + \mu \mathbf{k} \times (P_2 - P_1) \quad (2)$$

(\mathbf{k} è il versore ortogonale al piano di figura), le equazioni (1) porgono per λ e μ i valori:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{(P_2 - P_1)^2} \right) \quad (3)$$

$$\mu = \pm \left(\frac{r_1^2}{(P_2 - P_1)^2} - \lambda^2 \right)^{1/2}$$

che definiscono la posizione di P_3 .

Analisi di velocità

Le componenti della velocità P'_3 del punto P_3 sono le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot P'_3 = \mathbf{u} \cdot P'_1 + r_1 r'_1 \\ \mathbf{v} \cdot P'_3 = \mathbf{v} \cdot P'_2 + r_2 r'_2 \end{cases} \quad (4)$$

ove si è posto:

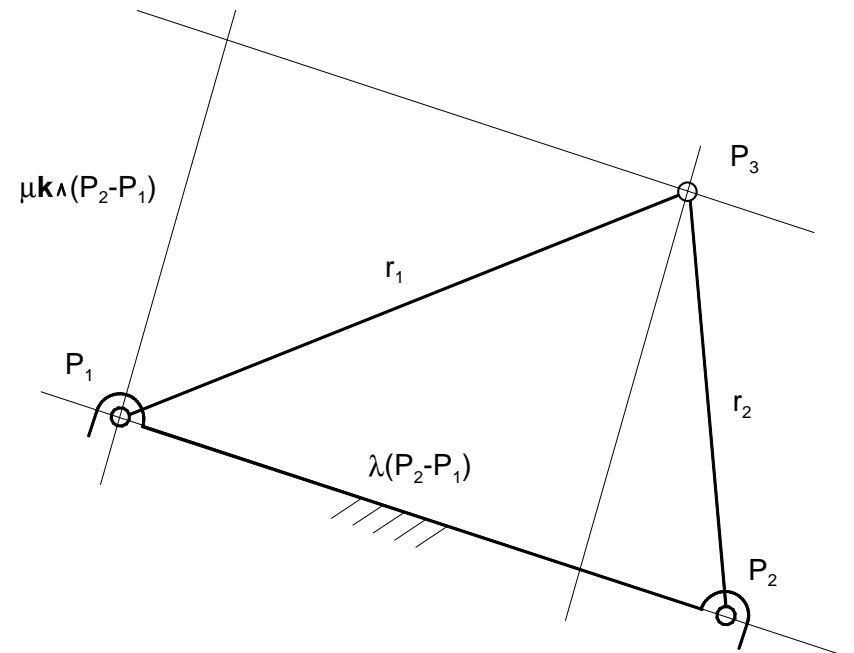
$$\mathbf{u} = (P_3 - P_1); \quad \mathbf{v} = (P_3 - P_2) \quad (5)$$

Analisi di accelerazione

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot P''_3 = \mathbf{u} \cdot P''_1 - \mathbf{u}^2 + r_1 r''_1 + r_1'^2 \\ \mathbf{v} \cdot P''_3 = \mathbf{v} \cdot P''_2 - \mathbf{v}^2 + r_2 r''_2 + r_2'^2 \end{cases} \quad (6)$$

La DIADE (gruppo rrr)

Catena cinematica chiusa con tre membri e tre coppie rotoidali.



Equazioni di chiusura

$$\begin{aligned} (P_3 - P_1)^2 &= r_1^2 \\ (P_3 - P_2)^2 &= r_2^2 \end{aligned} \quad (8a; 8b)$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} (P_3 - P_1) &= \lambda (P_2 - P_1) + \mu \bar{\mathbf{k}} \wedge (P_2 - P_1) \\ (P_3 - P_2) &= (P_3 - P_1) - (P_2 - P_1) \end{aligned}$$

Dalla (8b)

$$r_2^2 = (P_3 - P_2)^2 = (P_3 - P_1)^2 + (P_2 - P_1)^2 - 2(P_3 - P_1)(P_2 - P_1) =$$

$$r_1^2 + (P_2 - P_1)^2 - 2[\lambda(P_2 - P_1) + \mu \bar{k} \wedge (P_2 - P_1)](P_2 - P_1) =$$

$$r_1^2 + (P_2 - P_1)^2 - 2\lambda(P_2 - P_1)^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{(P_2 - P_1)^2} \right]$$

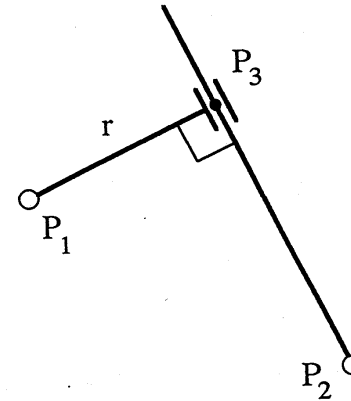
Dalla (8a)

$$\lambda^2 (P_2 - P_1)^2 + \mu^2 (P_2 - P_1)^2 = r_1^2$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{r_1^2}{(P_2 - P_1)^2} - \lambda^2}$$

$\mu^2 > 0$	2 soluzioni reali
$\mu^2 = 0$	2 soluzioni reali coincidenti (posizione singolare)
$\mu^2 < 0$	2 soluzioni complesse (la DIADE non e' assemblabile)

Gruppo rrp



Analisi di posizione

Noti P_1 , r , e P_2 , si determina P_3 . Le condizioni di compatibilità sono:

$$\begin{cases} (P_3 - P_1)^2 = r^2 \\ (P_3 - P_1) \cdot (P_3 - P_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Indicando con \mathbf{k} il versore ortogonale al piano di figura e ponendo inoltre

$$(P_3 - P_1) = \lambda (P_2 - P_1) + \mu \mathbf{k} \times (P_2 - P_1) \quad (2)$$

dalle equazioni (1) si ricavano i valori di λ e μ :

$$\lambda = \frac{r^2}{(P_2 - P_1)^2}$$

$$\mu = \pm [\lambda (1 - \lambda)]^{1/2} \quad (3)$$

che definiscono la posizione di P_3 .

Analisi di velocità

Le componenti di P'_3 sono le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot P'_3 = \mathbf{u} \cdot P'_1 + r r' \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot P'_3 = \mathbf{u} \cdot P'_2 + \mathbf{v} \cdot P'_1 \end{cases} \quad (4)$$

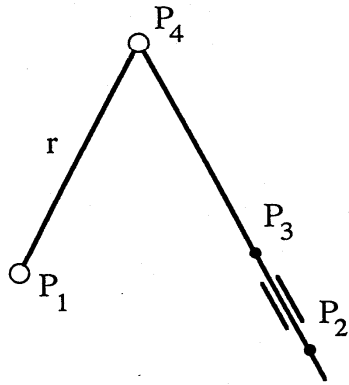
ove si è posto:

$$\mathbf{u} = (P_3 - P_1); \quad \mathbf{v} = (P_3 - P_2) \quad (5)$$

Analisi di accelerazione

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot P''_3 = \mathbf{u} \cdot P''_1 - \mathbf{u}^2 + r r'' + r'^2 \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot P''_3 = \mathbf{u} \cdot P''_2 + \mathbf{v} \cdot P''_1 - 2 \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' \end{cases} \quad (6)$$

Gruppo rpr



Analisi di posizione

Noti P_1 , r , P_2 e P_3 , si determina P_4 . Le condizioni di compatibilità sono:

$$\begin{cases} (P_4 - P_1)^2 = r^2 \\ (P_4 - P_2) \times (P_3 - P_2) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(\mathbf{k} è il versore ortogonale al piano di figura). Ponendo:

$$(P_4 - P_1) = \lambda (P_3 - P_2) + \mu \mathbf{k} \times (P_3 - P_2) \quad (2)$$

le equazioni (1) forniscono per μ e λ i valori:

$$\mu = \frac{(P_3 - P_2) \times (P_2 - P_1) \cdot \mathbf{k}}{(P_3 - P_2)^2} \quad (3)$$

$$\lambda = \pm \left(\frac{r^2}{(P_3 - P_2)^2} - \mu^2 \right)^{1/2}$$

che definiscono la posizione del punto P_4 .

Analisi di velocità

Le componenti della velocità P'_4 di P_4 , sono le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot P'_4 = \mathbf{w} \cdot P'_1 + r r' \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_4 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{u}') \cdot \mathbf{k} \end{cases} \quad (4)$$

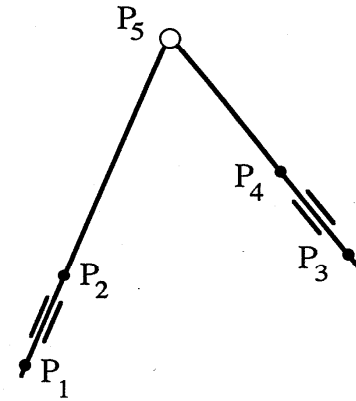
ove si è posto:

$$\mathbf{u} = (P_3 - P_2); \quad \mathbf{v} = (P_4 - P_2) \quad \mathbf{w} = (P_4 - P_1) \quad (5)$$

Analisi di accelerazione

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot P''_4 = \mathbf{w} \cdot P''_1 - w'^2 + r r'' + r'^2 \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_4 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{u}'') \cdot \mathbf{k} + 2(\mathbf{v}' \times \mathbf{u}') \cdot \mathbf{k} \end{cases} \quad (6)$$

Gruppo ppr



Analisi di posizione

Noti P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , si determina P_5 . Le condizioni di compatibilità sono:

$$\begin{cases} (P_5 - P_1) \times (P_2 - P_1) \cdot \mathbf{k} = 0 \\ (P_5 - P_3) \times (P_4 - P_3) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ove si è indicato con \mathbf{k} il versore ortogonale al piano. Se si pone:

$$(P_5 - P_1) = \lambda (P_2 - P_1) \quad (2)$$

la prima delle condizioni (1) risulta soddisfatta, mentre la seconda porge:

$$\lambda = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \quad (3)$$

ove:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (P_2 - P_1) \\ \mathbf{v} &= (P_4 - P_3) \\ \mathbf{w} &= (P_3 - P_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Il valore di λ fornito dalla condizione (3) definisce, tramite la (2), la posizione del punto P_5 .

Analisi di velocità

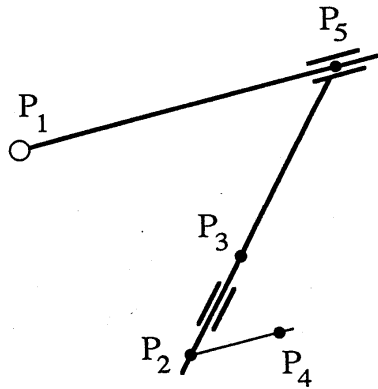
Derivando rispetto al tempo le equazioni (1) si ottiene:

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{u}') \cdot (P_5 - P_1) \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P'_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P'_3 - (\mathbf{k} \times \mathbf{v}') \cdot (P_5 - P_3) \end{cases} \quad (5)$$

Analisi di accelerazione

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{u}'') \cdot (P_5 - P_1) - 2(\mathbf{k} \times \mathbf{u}') \cdot (P'_5 - P'_1) \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P''_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P''_3 - (\mathbf{k} \times \mathbf{v}'') \cdot (P_5 - P_3) - 2(\mathbf{k} \times \mathbf{v}') \cdot (P'_5 - P'_3) \end{cases} \quad (6)$$

Gruppo rpp



Analisi di posizione

Noti P_1, P_2, P_3 e P_4 , si determina P_5 . Le condizioni di compatibilità sono:

$$\begin{cases} (P_5 - P_2) \times (P_3 - P_2) \cdot \mathbf{k} = 0 \\ (P_5 - P_1) \times (P_4 - P_2) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(\mathbf{k} è il versore ortogonale al piano). Se si pone:

$$(P_5 - P_1) = \lambda (P_4 - P_2) \quad (2)$$

la seconda delle condizioni (1) risulta soddisfatta, mentre la prima porge:

$$\lambda = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{k} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} \quad (3)$$

ove:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (P_3 - P_2) \\ \mathbf{v} = (P_4 - P_2) \\ \mathbf{w} = (P_2 - P_1) \end{cases} \quad (4)$$

Il valore di λ fornito dalla condizione (3) definisce, tramite la (2), la posizione del punto P_5 .

Analisi di velocità

Derivando rispetto al tempo le equazioni (1) si ottiene:

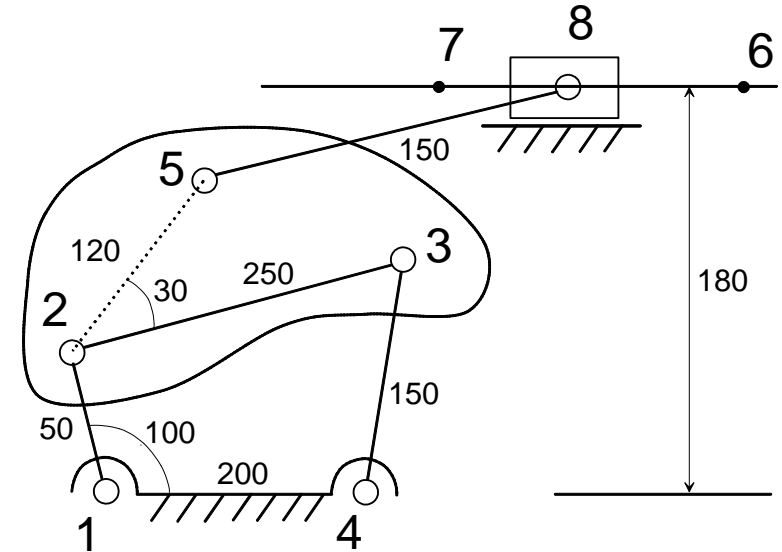
$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P'_2 - (\mathbf{k} \times \mathbf{u}') \cdot (P_5 - P_2) \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P'_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P'_1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{v}') \cdot (P_5 - P_1) \end{cases} \quad (5)$$

Analisi di accelerazione

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) \cdot P''_2 - (\mathbf{k} \times \mathbf{u}'') \cdot (P_5 - P_2) - 2 (\mathbf{k} \times \mathbf{u}') \cdot (P'_5 - P'_2) \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P''_5 = (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \cdot P''_1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{v}'') \cdot (P_5 - P_1) - 2 (\mathbf{k} \times \mathbf{v}') \cdot (P'_5 - P'_1) \end{cases} \quad (6)$$

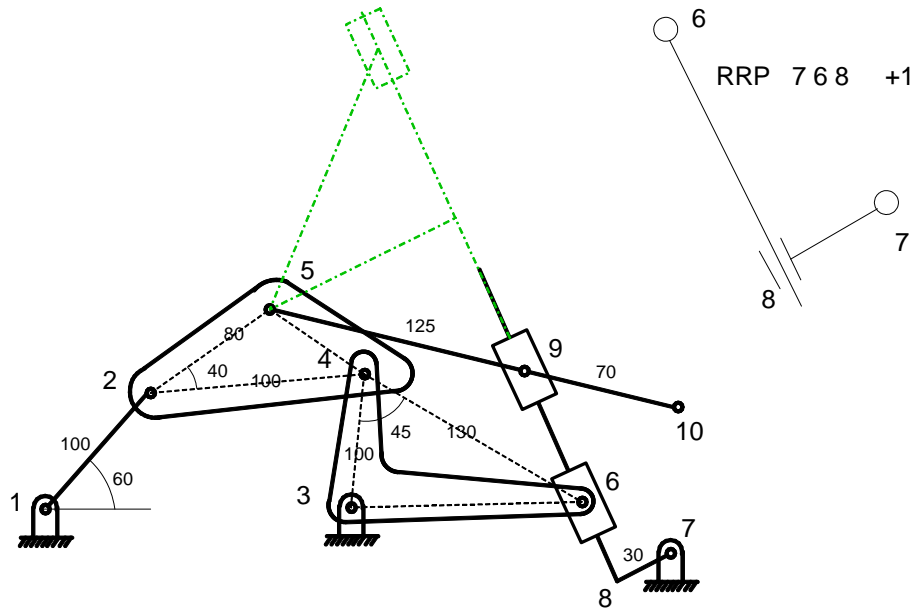
ESEMPI

ESEMPIO No. 1



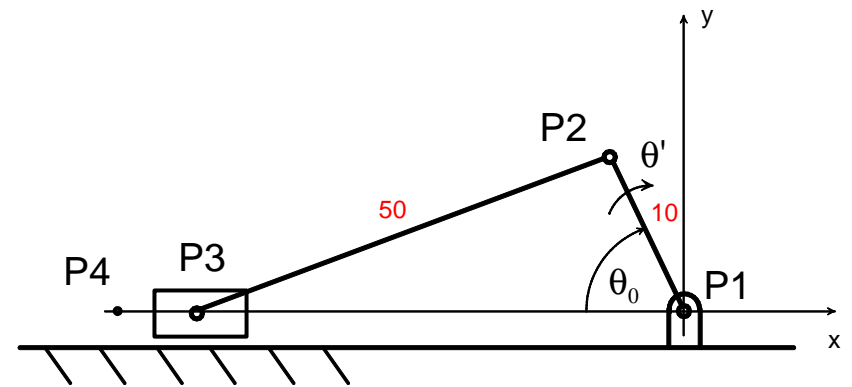
knw	1	0	0					
knw	4	200	0					
knw	6	200	180					
knw	7	150	180					
drv 1	4	2	12	100	1	50	0	
rrr 2	4	3	+1	10	10	250	0	150 0
drv 2	3	5	9	30	0	120	0	
rpr 5	6	7	8	-1	11	11	150	0
tim	100	360						

ESEMPIO No. 2



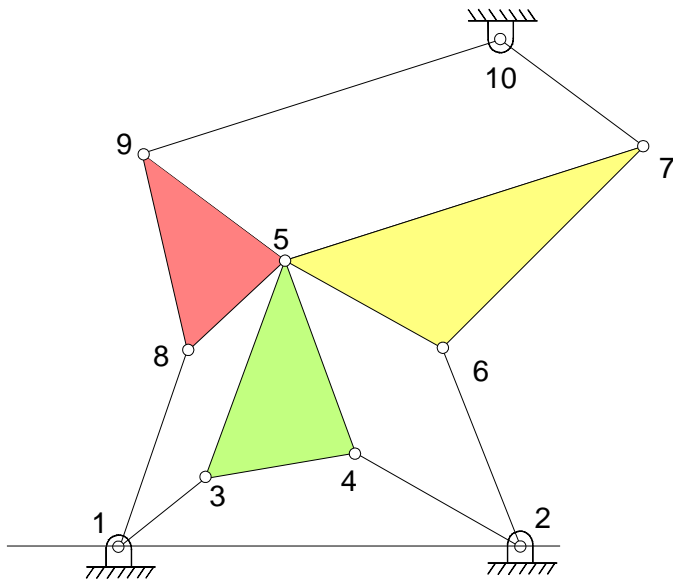
KNW 1	0.	0.							
KNW 3	150.	0.							
KNW 7	290.	-20.							
DRV 1	3	2	7	60.	40.	100.	0.		
RRR 2	3	4	1	7	7	100.	0.	100.	0.
DRV 2	4	5	14	40.	0.	80.	0.		
DRV 4	3	6	11	45.	0.	130.	0.		
RRP 7	6	8	1	10	10	30.	0.		
RPR 5	8	6	9	-1	12	10	125.	0.	
DRV 9	5	10	12	180.	0.	70.	0.		
TIM 50	1								

ESEMPIO No. 3



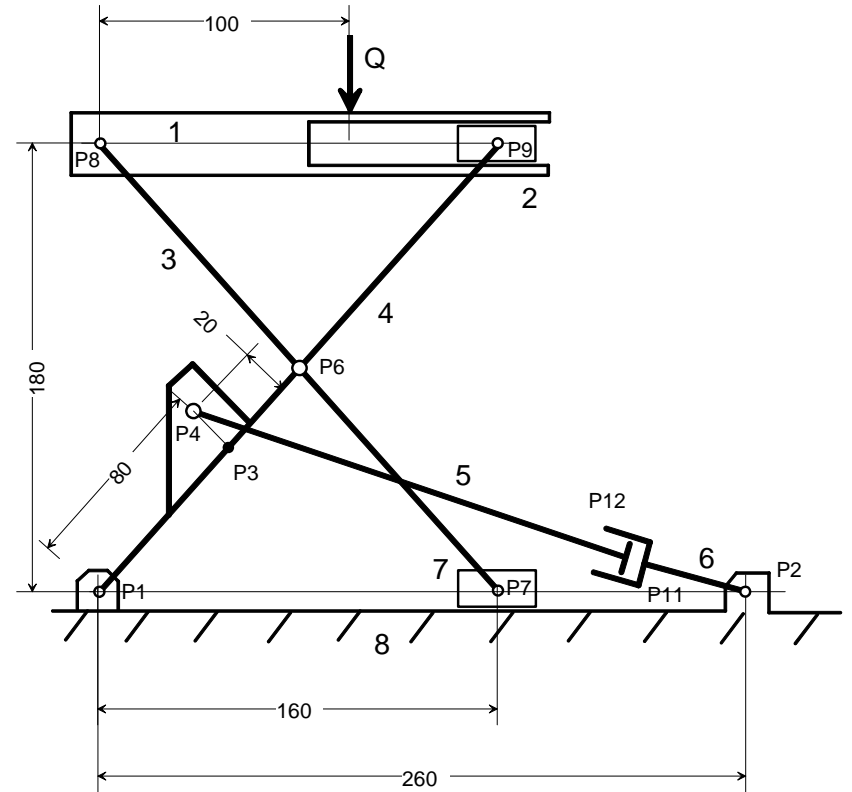
knw 1	0.	0.							
knw 4	100.	0.							
drv 1	4	2	12	-50.	-1.	10.	0.		
rpr 2	4	1	3	+1	14	14	50.	0.	
tim 180	360.								

ESEMPIO No. 4



knw	1	0.	0.						
knw	2	10.	0.						
drv 1	2	3	14	-40.	1.	3.	0.		
rrr 3	2	4	+1	14	14	4.	0.	5.	0.
rrr 3	4	5	+1	14	14	8.	0.	7.	0.
rrr 5	2	6	+1	11	11	5.	0.	7.	0.
rrr 5	6	7	+1	11	11	10.	0.	8.75	0.
rrr 1	5	8	+1	12	12	8.	0.	3.	0.
rrr 8	5	9	+1	12	12	6.	0.	5.25	0.
rrr 9	7	10	+1	12	11	10.	0.	5.25	0.
tim	150	97.							

ESEMPIO No. 5



KNW 1	0	0							
KNW 2	2.6	0							
DRV 1	2	3	10	10	1	0.8	0		
DRV 3	1	4	10	-90	0	0.2	0		
DRV 3	1	6	10	180	0	0.40416	0		
RPR 6	1	2	7	+1	10	14	1.20416	0	
DRV 6	7	8	10	180	0	1.20416	0		
DRV 6	1	9	10	180	0	1.20416	0		
DRV 8	9	10	14	0	0	2.5	0		
DRV 2	4	11	12	0	0	1.5	0		
DRV 4	2	12	11	0	0	1.5	0		
TIM	70	70							